23ο Θερινό Σχολείο - Συνέδριο «Δυναμικά Συστήματα και Πολυπλοκότητα»
Πανεπιστημιακή Κατασκήνωση Καλάνδρας ΑΠΘ, Χαλκιδική, 27/8/2016 – 3/9/2016

Ισορροπία Nash σε δίκτυα
Μια εισαγωγή

Κωνσταντίνος Γ. Παπαδόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Μικροοικονομικής Θεωρίας
Τμήμα Οικονομικών ΑΠΘ
http://users.auth.gr/kpap

Εισαγωγικά

- Οι άνθρωποι, οι επιχειρήσεις, διάφορες ομάδες, τα κράτη (παίκτες στο εξής) βρίσκονται σε καταστάσεις ανταγωνισμού ή συνεργασίας.
- Η έκβαση μιας κατάστασης μπορεί να είναι ευνοϊκή για κάποιους και δυσάρεστη για κάποιους άλλους.
- Υποθέτουμε ότι οι διάφορες οντότητες (παίκτες) μπορούν να επηρεάσουν την έκβαση (outcome) /το αποτέλεσμα μιας κατάστασης με τις αποφάσεις τους.
- Οι παίκτες γνωρίζουν πως η έκβαση μιας κατάστασης δεν εξαρτάται μόνο από την απόφασή τους (ή την απόφαση της τύχης) αλλά και από της αποφάσεις άλλων παικτών.

Εισαγωγικά

- Επομένως η έκβαση μιας κατάστασης είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των αποφάσεων των ατόμων
- Η Θεωρία Παιγνίων (ΘΠ στο εξής) ασχολείται με την μελέτη της αλληλεξάρτησης των αποφάσεων των παικτών (πχ ανθρώπους, ζώα και υπολογιστές) και την πρόβλεψη της έκβασης μιας κατάστασης (ενός παιγνίου).
- Είναι η επιστήμη που μελετά την στρατηγική λήψη αποφάσεων (strategic decision making), συνώνυμο Interactive Decision Theory
- Εφαρμόζεται στα οικονομικά, στις πολιτικές επιστήμες, στην ψυχολογία, καθώς και στη λογική, στην επιστήμη των υπολογιστών και στην βιολογία.

Παραδείγματα αλληλεξάρτησης των αποφάσεων

- Μεταξύ φίλων: Να αργήσω ή να μην αργήσω σε μια συνάντηση αν το άλλο άτομο καθυστερήσει να έρθει;
- Μεταξύ στρατηγών: Να αποσύρω τα στρατεύματα κατά την διάρκεια της εκεχειρίας ή να σπάσω την εκεχειρία και να κάνω επίθεση;
- Μεταξύ επιχειρήσεων: Να χρεώσω χαμηλή ή υψηλή τιμή; Να διαφημίσω πολύ ή λίγο;
- Μεταξύ πολιτικών: Να πάρω ίδια ή διαφορετική θέση σε ένα θέμα σε σχέση με τον πολιτικό μου αντίπαλο;
- Μεταξύ ατόμου και λοιπών παικτών: Πότε να πάω στην Εφορία; Πότε να πάρω την συγκεκριμένη διαδρομή; Να πάρω φάρμακα πριν τον αγώνα;

Μεμονωμένες αποφάσεις

- Να ποντάρω μαύρο ή κόκκινο στη ρουλέτα;
- Να επιλέξω το πράσινο ή το κόκκινο φόρεμα;
- Καταστάσεις στις οποίες η έκβαση/το αποτέλεσμα εξαρτάται αποκλειστικά από την τύχη και όχι από τις αποφάσεις ενός άλλου παίκτη δεν αποτελούν αντικείμενο μελέτης της ΘΠ.
- Σε αντίθεση με τα προηγούμενα παραδείγματα δεν αποτελούν στρατηγικές αποφάσεις.

Στρατηγικά Παίγνια

Συστατικά Παιγνίου

- Παίκτες (Πόσοι είναι και ποιές οι προτιμήσεις τους)
- Στρατηγικές (το σύνολο των επιλογών που έχει κάθε παίκτης)
- Αποδόσεις

Βασικές Υποθέσεις για τα στατικά παίγνια πλήρους πληροφόρησης

- Υπόθεση της **ορθολογικότητας**: Όλοι οι παίκτες προτιμούν την περισσότερη από την λιγότερη ωφέλεια
- Υπόθεση της **πλήρους πληροφόρησης**: Όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τις προτιμήσεις των άλλων παικτών
- Υπόθεση της **κοινής γνώσης**: Ο κάθε παίκτης γνωρίζει ότι οι υπόλοιποι παίκτες γνωρίζουν ότι αυτός γνωρίζει τι γνωρίζουν αυτοί για αυτόν …

Στρατηγικά Παίγνια : Μαθηματική Διατύπωση

- Σύνολο Παικτών $i \in I = \{1, ..., i, ..., n\}$
- Σύνολο Στρατηγικών του κάθε παίκτη S_i $s_i \in S_i$
- Η συνάρτηση απόδοσης του κάθε παίκτη $u_i(s_1, s_2, ..., s_n)$
- Επομένως ένα παίγνιο σε κανονική μορφή (Normal form game) δίνεται από $G = (S_i, u_i(.))_{i=1}^{n}$.

Συμβολισμοί

Συνδυασμός στρατηγικών όλων των παικτών ή προφίλ στρατηγικών

$$s = (s_1, ..., s_n)$$

Οι στρατηγικές όλων των άλλων παικτών εκτός του i και τα αντίστοιχα σύνολα

$$s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$$

$$(s_{-i}, \bar{s}_i) = (s_1, ..., s_{i-1}, \bar{s}_i, s_{i+1}, ..., s_n)$$

$$S = S_1 \times S_2 \times ...S_n$$

$$S_{-i} = S_1 \times S_2 \times ...S_{i-1} \times S_{i+1} \times ..., S_n$$

Αναπαράσταση σε πίνακα (bi-matrix representation)

- Για παίγνια με 2 άτομα

$S_1 = \{A, B, C\}$ $\quad$ $S_2 = \{X, Y\}$

	X	Y
A	$u_1(A, X)\,,\ u_2(A, X)$	$u_1(A, Y)\,,\ u_2(A, Y)$
B	$u_1(B, X)\,,\ u_2(B, X)$	$u_1(B, Y)\,,\ u_2(B, Y)$
C	$u_1(C, X)\,,\ u_2(C, X)$	$u_1(C, Y)\,,\ u_2(C, Y)$

Υποδειγματοποίηση μιας απλής κοινωνικής κατάστασης ως παίγνιο

Παράδειγμα

Μια μεμονωμένη επιλογή

- Η (διάσημη ηθοποιός) κυρία Α έχει να επιλέξει τι χρώμα φόρεμα να φορέσει σε μια εκδήλωση (στην απονομή βραβείων στις Κάννες)
- Ας υποθέσουμε δύο διαθέσιμα χρώματα Πράσινο και Κόκκινο
- Η κυρία Α επιλέγει Πράσινο : Είναι το αγαπημένο της χρώμα. Η απόφαση της εξαρτάται αποκλειστικά από τις προτιμήσεις της (Π > Κ) και δεν αφορά την θεωρία παιγνίων

Μια στρατηγική επιλογή

- Η κυρία Α πληροφορείται πως κάποια άλλη κυρία Β θα φορέσει ενδεχομένως πράσινο ή κόκκινο φόρεμα στον ίδιο χορό
- Οι πιθανές εκβάσεις αυτής της κατάστασης δίνονται από τον πίνακα

A \ B	Πράσινο	Κόκκινο
Πράσινο	A , B	A , B
Κόκκινο	A , B	A , B

- Τι θα επιλέξει τώρα η κυρία Α;
- Αν είναι αδιάφορη ως προς την μοναδικότητα του χρώματος στον χορό, τότε Π.

  - (Π,Κ) ~ (Π,Π) > (Κ,Π) ~ (Κ,Κ)
- Αν ωστόσο ενδιαφέρεται και για την μοναδικότητα θα κατατάξει τις πιθανές εκβάσεις ως εξής:
  - (Π,Κ) > (Κ,Π) > (Π,Π) > (Κ,Κ)
- Είναι φανερό ότι η τελική της «ωφέλεια» δεν εξαρτάται μόνο από την επιλογή της αλλά και από την επιλογή της άλλης κυρίας

Αναπαράσταση των προτιμήσεων με αριθμούς

A \ B	Πράσινο	Κόκκινο
Πράσινο	1, .	3, .
Κόκκινο	2, .	0, .

- Κυρία Α: (Π,Κ) > (Κ,Π) > (Π,Π) > (Κ,Κ)
- Κυρία Α: U(Π,Κ) > U(Κ,Π) > U(Π,Π) > U(Κ,Κ)
- Κυρία Α: 3 > 2 > 1 > 0

- Έστω ότι η Β προτιμά το πράσινο αλλά δεν ενδιαφέρεται για την μοναδικότητα του χρώματος
- Κυρία Β: (Π, Π) ~ (Κ,Π) > (Π, Κ) ~ (Κ,Κ)
- Κυρία Β: U(Π, Π) ~ U(Κ,Π) > U(Π, Κ) ~ U(Κ,Κ)
- Κυρία Β: 1 = 1 > 0 ~ 0

A \ B	Πράσινο	Κόκκινο
Πράσινο	A , B	A , B
Κόκκινο	A , B	A , B

A \ B	Πράσινο	Κόκκινο
Πράσινο	1, 1	3, 0
Κόκκινο	2, 1	0, 0

- **Οι εκβάσεις και οι προτιμήσεις σε έναν πίνακα, ο οποίος είναι κοινή γνώση και για τους δύο παίκτες, (ισοδύναμα ο καθένας γνωρίζει τις πιθανές εκβάσεις και τις προτιμήσεις του αντιπάλου και επίσης ότι ο αντίπαλός του γνωρίζει ότι ο ίδιος γνωρίζει τις εκβάσεις και τις προτιμήσεις)**

Στρατηγική ισορροπία

Κυρίαρχη στρατηγική της Β

A \ B	Πράσινο	Κόκκινο
Πράσινο	1, 1	3, 0
Κόκκινο	2, 1	0, 0

Στρατηγική ισορροπία (οι A&B είναι ίδιες)

2 πιθανές στρατηγικές εκβάσεις

B / A	Πράσινο	Κόκκινο
Πράσινο	1, 1	3, 2
Κόκκινο	2, 3	0, 0

Μονά-ζυγά ή ταίριασμα νομισμάτων (matching pennies)

- Εμφανίζουμε ταυτόχρονα δύο νομίσματα
- Αν οι όψεις τους είναι ίδιες κερδίζει ο ένας, αν δεν είναι κερδίζει ο άλλος
- Το παίγνιο δεν επιδέχεται καμία συνεργασία

1 \ 2	Κ	Γ
Κ	1, -1	-1, 1
Γ	-1, 1	1, -1

Παράδειγμα: το Δίλημμα του Κρατούμενου (Prisoner’s dilemma)

- Δύο άτομα συλλαμβάνονται ως ύποπτοι δράστες ενός εγκλήματος (πχ φόνος).
- Ο εισαγγελέας δεν έχει ακλόνητα στοιχεία για το έγκλημα αλλά για ένα μικρότερο παράπτωμα (πχ διάρρηξη και κλοπή).
- Ο εισαγγελέας χωρίζει τους υπόπτους και λέει στον καθένα, “Αν καταδώσεις τον συνεργάτη σου, θα ελευθερωθείς και ο συνεργάτης σου θα καταδικαστεί για 9 χρόνια. Αν ομολογήσετε και οι δύο θα καταδικαστείτε σε 6 χρόνια φυλάκιση”
- Ο κάθε ύποπτος γνωρίζει ότι αν δεν ομολογήσει κανείς, θα δικαστούν για το παράπτωμα και θα καταδικαστούν σε 1 χρόνο φυλάκιση.

το Δίλημμα του Κρατούμενου

- Να αναπαρασταθεί το στρατηγικό παίγνιο σε κανονική μορφή
- Χαρακτηριστικό του παιγνίου: η συνεργασία αποδίδει αλλά όπως θα δούμε αργότερα δεν υποστηρίζεται στρατηγικά

1 \ 2	Καταδίδω	Δεν καταδίδω
Καταδίδω	-6 , -6	0 , -9
Δεν καταδίδω	-9 , 0	-1 , -1

Το κυνήγι του ελαφιού (Stug Hunt), J.J. Rousseau 1775

- Ομάδα κυνηγών που αν μείνουν όλοι προσηλωμένοι στο κυνήγι του ελαφιού θα το πιάσουν και θα το μοιράσουν εξίσου, ενώ αν έστω και ένας επιδιώξει να κυνηγήσει τον περαστικό λαγό, το ελάφι χάνεται.
- Το ατομικό όφελος του λαγού είμαι μικρότερο από το όφελος ενός τεμαχίου του ελαφιού.
- Να γίνει κατάταξη των εκβάσεων σύμφωνα με τις προτιμήσεις για 2 παίκτες και να αναπαρασταθεί το παίγνιο σε μορφή πίνακα.
- Το παίγνιο δεν είναι ίδιο με το δίλημμα του κρατούμενου

Σύγκριση

1 \ 2	Ελάφι	Λαγός
Ελάφι	2 , 2	0 , 1
Λαγός	1 , 0	1 , 1

1 \ 2	Καταδίδω	Δεν καταδίδω
Καταδίδω	-6 , -6	0 , -9
Δεν καταδίδω	-9 , 0	-1 , -1

Ισορροπία Nash

Ισορροπία Nash

Ορισμός Έστω ένα παίγνιο $G = \{I, (S_i, u_i)_{i \in I}\}$. Ο συνδυασμός στρατηγικών (ή προφίλ στρατηγικών) $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^* \ldots s_I^*)$ είναι ισορροπία Nash αν για όλους τους παίκτες i, ισχύει

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*), \text{για όλες τις } s_i \in S_i$$

Δηλαδή αν είμαι ο παίκτης i και προβλέπω ότι όλοι οι άλλοι παίκτες θα παίξουν τις στρατηγικές $s_{-i}^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*, \ldots, s_{-i}, s_{+i}, \ldots, s_I^*)$, τότε η άριστη στρατηγική μου, απέναντι στις στρατηγικές s_{-i}^* που προβλέπω για τους άλλους, είναι η $s_i^* \in S_i$.

Με άλλα λόγια στην ισορροπία Nash θα πρέπει οι στρατηγικές όλων των παικτών να είναι αμοιβαία βέλτιστες. Ισοδύναμα, σε μια ισορροπία Nash κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει μονομερώς την στρατηγική του δεδομένων των στρατηγικών των άλλων παικτών.

Παράδειγμα

1 \ 2	L	C	R
T	0 , 4	4 , 0	5 , 3
M	4 , 0	0 , 4	5 , 3
B	3 , 5	3 , 5	6 , 6

Στρατηγικές του παίκτη2

Άριστη απάντηση του παίκτη1 στην αντίστοιχη στρατηγική του παίκτη 2

s_2	$s_1^*(s_2)$
L	M
C	T
R	B

s_1	$s_2^*(s_1)$
T	
M	
B	

Τι σκέφτεται ο παίκτης 1; Τί σκέφτεται ο παίκτης 2;

«Δεν ξέρω τι θα παίξει ο άλλος παίκτης, αλλά μπορώ να προβλέψω την αντίδρασή του στις δικές μου επιλογές»

Να βρεθούν οι άριστες στρατηγικές (άριστες απαντήσεις) του κάθε παίκτη απέναντι σε όλες τις δυνατές στρατηγικές του άλλου παίκτη

Συνάρτηση βέλτιστης αντίδρασης

Ορισμός Έστω ένα παίγνιο $G = \{I, (S_i, u_i)_{i \in I}\}$. Η συνάρτηση βέλτιστης αντίδρασης του παίκτη i απέναντι στον συνδυασμό στρατηγικών $s_{-i} \in S_{-i}$ των υπολοίπων παικτών είναι μια συνάρτηση $s_i(s_{-i}) : S_{-i} \to S_i$, τέτοια ώστε

$$s_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i}) \text{ ή}$$

$$s_i(s_{-i}) = \{s_i^* \in S_i : u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \text{για όλες τις } s_i \in S_i\}$$

Δηλαδή η συνάρτηση βέλτιστης αντίδρασης μας δίνει για κάθε δυνατό συνδυασμό στρατηγικών των υπολοίπων παικτών s_{-i}, την (τις) στρατηγική(ές) εκείνη του i που θα του αποφέρει(ουν) την μεγαλύτερη δυνατή απόδοση.

Συναρτήσεις Αντίδρασης με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών

s_2	$s_1^*(s_2)$
L	M
C	T
R	B

s_1	$s_2^*(s_1)$
T	L
M	C
B	R

$$s_i(s_{-i}) = \{s_i^* \in S_i : u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \text{για όλες τις } s_i \in S_i\}$$

Συναρτήσεις αντίδρασης με άπειρο αριθμό στρατηγικών

$$u_1(x_1, x_2) = 4x_1 - x_1^2 - x_1x_2 - 3$$

$$u_2(x_1, x_2) = x_2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - 1$$

$S_1 = S_2 = [a,b]$ στο R

Να βρεθούν οι συναρτήσεις αντίδρασης των παικτών.

$$s_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

Du1/dx1=0=> 4-2 x1-x2 = 0 => x1 (x2) = 2 - x2/2

Du2/dx2=0=> 1-2 x2 -2 x1 =0 => x2 (x1) = ½ -x1

Εύρεση ισορροπίας Nash από τις συναρτήσεις αντίδρασης

Ορισμός Έστω ένα παίγνιο $G = \{I, (S_i, u_i)_{i \in I}\}$. Ο συνδυασμός στρατηγικών $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^* \ldots s_I^*)$ είναι ισορροπία Nash του στρατηγικού παιγνίου G αν και μόνον αν η στρατηγική του κάθε παίκτη είναι άριστη απάντηση στις στρατηγικές s_{-i}^* των υπολοίπων παικτών.

$$s_i^* = s_i(s_{-i}^*) \text{ για κάθε παίκτη } i \in I.$$

Προσοχή απέναντι στον συνδυασμό s_{-i}^* ο παίκτης i μπορεί να μην έχει μόνο μια άριστη απάντηση! Σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε συνάρτηση αλλά αντιστοιχία.

Εύρεση ισορροπίας Nash από τις συναρτήσεις αντίδρασης

Ορισμός Έστω ένα παίγνιο $G = \{I, (S_i, u_i)_{i \in I}\}$. Το σύστημα των βέλτιστων αντιδράσεων (I στρατηγικές x I εξισώσεις) όλων των παικτών είναι

$$s_1 = s_1(s_{-1}),$$

$$s_2 = s_2(s_{-2}),$$

$$\ldots$$

$$s_I = s_I(s_{-I}).$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος $s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^* \ldots s_I^*)$ μας δίνει την (τις) ισορροπία(-ίες) Nash.

Να βρεθεί η ισορροπία Nash

- Στο προηγούμενο παίγνιο

$$u_1(x_1, x_2) = 4x_1 - x_1^2 - x_1x_2 - 3$$
$$u_2(x_1, x_2) = x_2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - 1$$

Du1/dx1=0=> 4-2 x1-x2 = 0 => x1 (x2) = 2 - x2/2
Du2/dx2=0=> 1-2 x2 -2 x1 =0 => x2 (x1) = ½ -x1

x1 = 3/2, x2 = -1 είναι η μοναδική ισορροπία Nash. Οι αποδόσεις για τους παίκτες είναι u1 (3/2, -1) και u2 (3/2, -1)

Public Goods in Networks

Bramoulle and Kranton (2007),
Journal of Economic Theory 135,
(2007), 478-494

Network model of public goods

- Public goods
  - Non excludable along social or geographic links
- Externalities
  - Effect of an action on a third party, (benefit or cost) that did not choose to incur that cost or benefit

Examples

- Plant of a garden benefits neighbors
- Effort in team project, benefits team menber
- Local Anti-Pollution Policy, benefits neighbors
- Therapy that cannot be patented, benefits neighbors (people who get aware)
- Innovation and acquisition of information are like public goods
  - They may be non-excludable
  - Induce externalities

Innovation and Information Externalities

- Information about new products from friends and family (someone puts effort on doing market search)
- A farmer's experience with new crop benefits neighboring farms (the farmer has put effort or taken risk to experiment)
- Research spillovers across firms
- Information spreads across networks
- Information posted of FB, benefits neighbors (but one puts effort of searching)

Motivation

- How does network structure (links across firms or individuals) affect incentive to innovate, or exert effort on research or acquire information that is not excludable.

A model of public goods in a network

There are n agents, and the set of agents is $N = \{1, \ldots, n\}$

Let $e_i \in [0, +\infty)$ denote agent i's level of effort

marginal cost of effort is constant and equal to c

Let $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ denote an effort profile of all agents

Agents are arranged in a network, which we represent as a graph $\mathbf{g}$,

$g_{ij} = 1 \quad g_{ij} = 0 \quad g_{ij} = g_{ji}$

A model of public goods in a network

Let N_i denote the set of agents that benefit directly from agent i's efforts,

i's *neighbors*: $N_i = \{j \in N \backslash i : g_{ij} = 1\}$.

neighborhood is defined as himself and his set of neighbors; i.e., $i \cup N_i$

Let $k_i = |N_i|$ denote the number of agent i's neighbors.

An agent's effort affects only neighbors
An neighbor's effort is a perfect substitute for an agent's effort

An agent i's payoff from profile $\mathbf{e}$ in graph $\mathbf{g}$ is then

$$U_i(\mathbf{e}; \mathbf{g}) = b\left(e_i + \sum_{j \in N_i} e_j\right) - ce_i.$$

Equilibrium contributions to the public good in a network

Given a structure $\mathbf{g}$, agents simultaneously choose effort levels

For a profile $\mathbf{e}$, each agent i earns payoffs $U_i(\mathbf{e}; \mathbf{g})$

Let e^* denote the effort level at which, to an individual agent, the marginal benefit equals its marginal cost; $b'(e^*) = c$.

Let $\overline{e}_i = \sum_{j \in N_i} e_j$ be the total effort of i's neighbors

A profile $\mathbf{e}$ is a Nash equilibrium if and only if

for every agent i either (1) $\overline{e}_i \geqslant e^*$ and $e_i = 0$ or

(2) $\overline{e}_i \leqslant e$ and $e_i = e^* - \overline{e}_i$

Explanation of NE

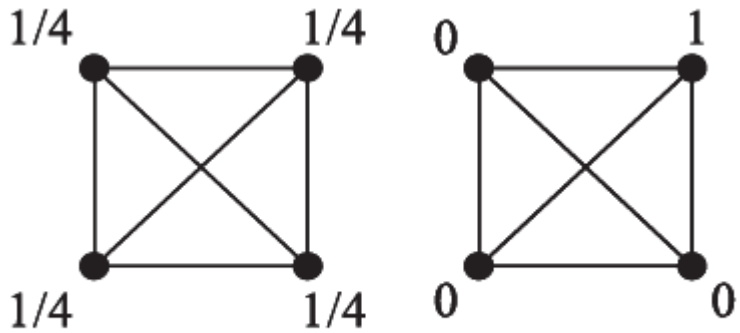
- Agents want to exert effort as long as their total benefits are less than $b(e^*)$
- If the benefit coming from the effort of his neighbors is *higher* than his optimal level $b(e^*)$, the agent exerts no effort, i.e. $e_i = 0$.
- If the benefit coming from the effort of his neighbors is *lower* than his optimal level $b(e^*)$, the agent exert effort $e_i > 0$ so that $b(\bar{e} + e_i) = b(e^*)$

Types of effort profiles

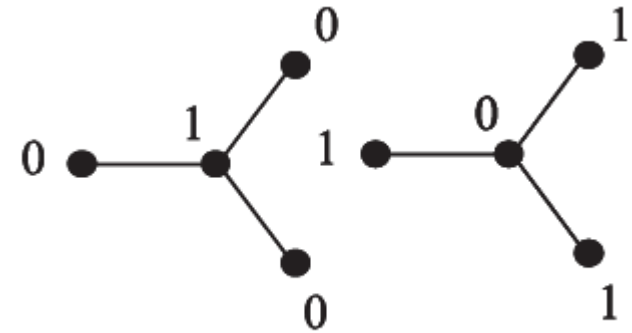
- Effort levels are strategic substitutes
- The more effort my neighbors put, the less effort I exert
- 3 types of effort profiles
  - Specialized: an agent exerts full effort e* or no effort, i.e. $\text{for all agents } i \text{ either } e_i = 0 \text{ or } e_i = e^*$
  - Distributed: all agents exert some effort $\text{for all agents } i, 0 < e_i < e^*$
  - Hybrid: between specialized and distributed

Example 1: Basic Graphs

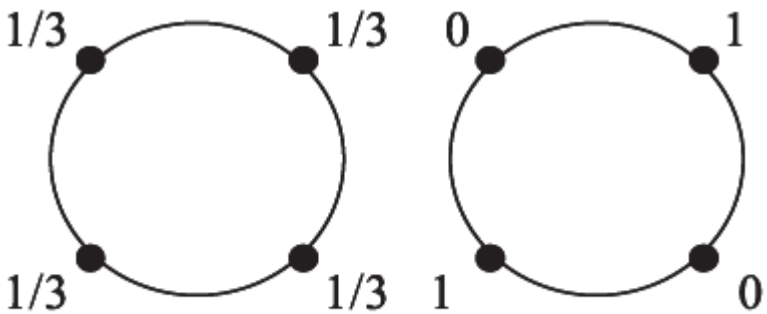
we set $e^* = 1$ for ease of exposition.



(a)



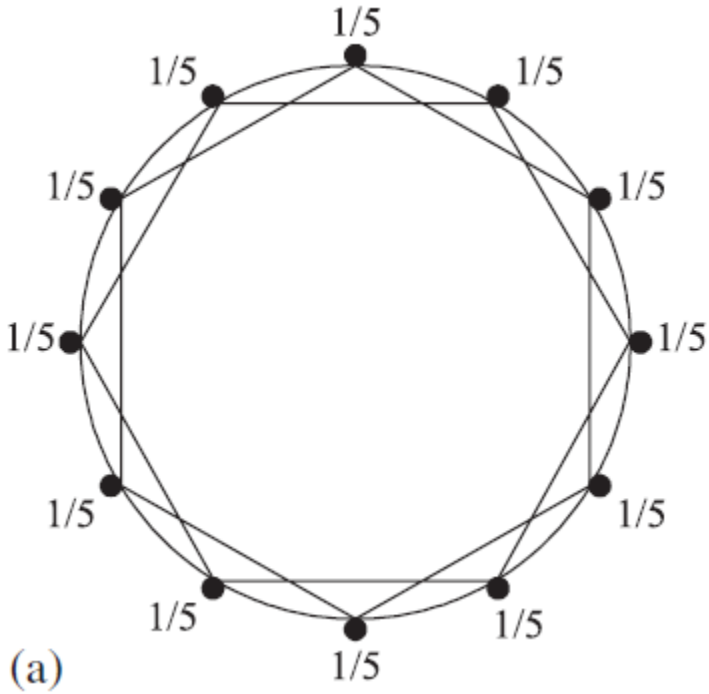
(b)



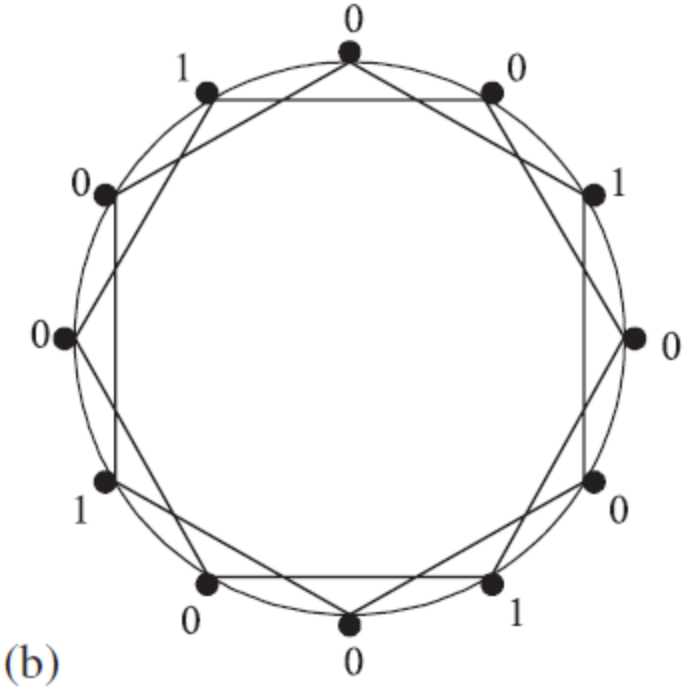
(c)

1.Describe type of profiles
2.Find NE

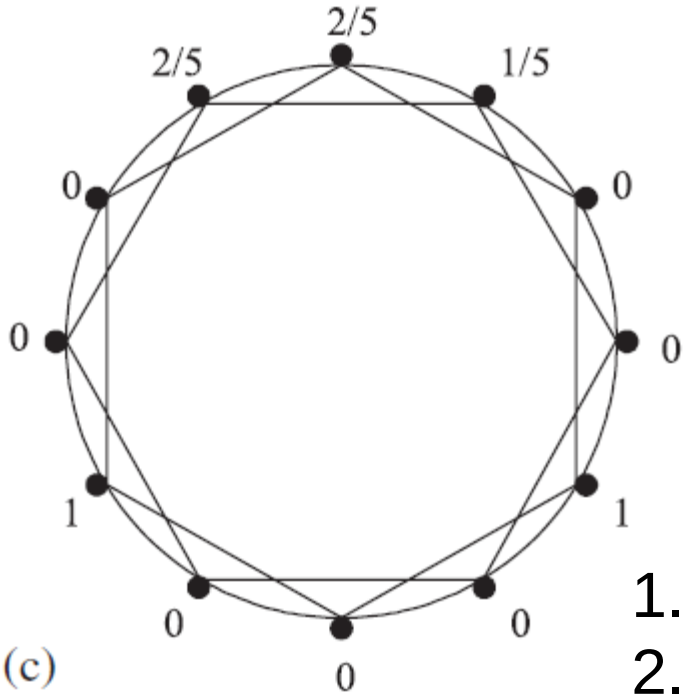
Local Interactions Graph



(a)



(b)



(c)

1. Describe type of profiles
2. Find NE

Existence of NE

- We use a concept from graph theory, *maximal independent sets*, to show that a specialized equilibrium always exists
- *Independent set* I of agents: No 2 agents who belong to I are linked

$$\forall i, j \in I \text{ such that } i \neq j, g_{ij} = 0$$

- An independent set is *maximal* if it is no proper subset of any other independent set

Properties of MIS

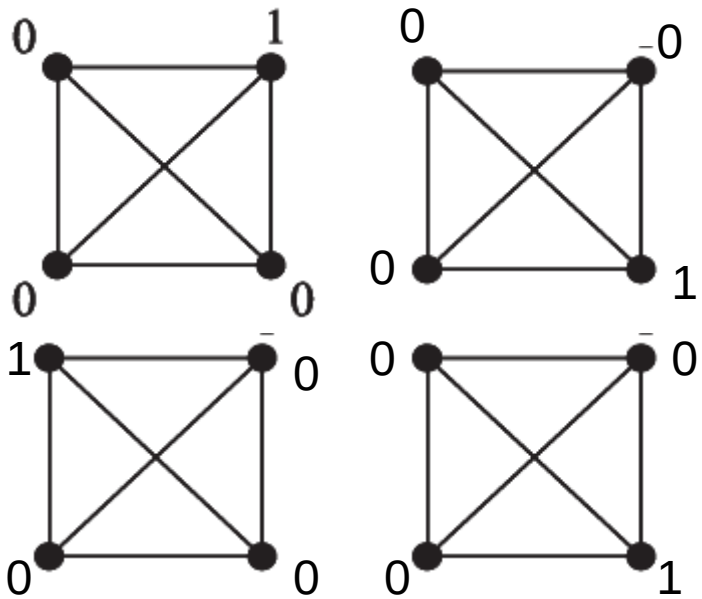
- Given an MIS I, every agent either belongs to I or is connected to an agent who belongs to I.
- => Agents can be partitioned into 2 disjoint sets
  - Those who belong to the MIS I
  - Those who are linked to an agent in the MIS I
- A *MIS I of order r* is a MIS : any individual not in I is connected to at least r individuals in I

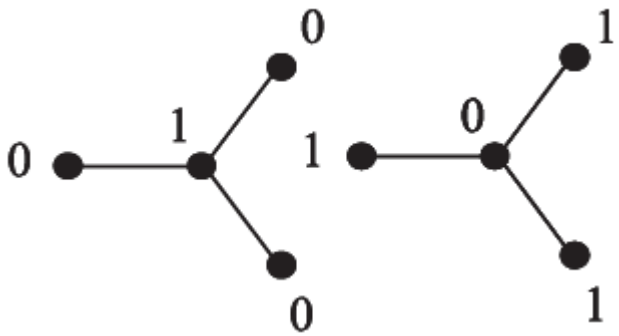
Theorem 1: existence

- Since efforts are strategic substitutes no 2 specialists can link at a Nash equilibrium
- Theorem 1: A specialized profile is a NE iff its set of specialists is a MIS of g. Since for every g there exists a MIS, there always exists a specialized Nash equilibrium

Example 2: Specialized Equilibria and MISs

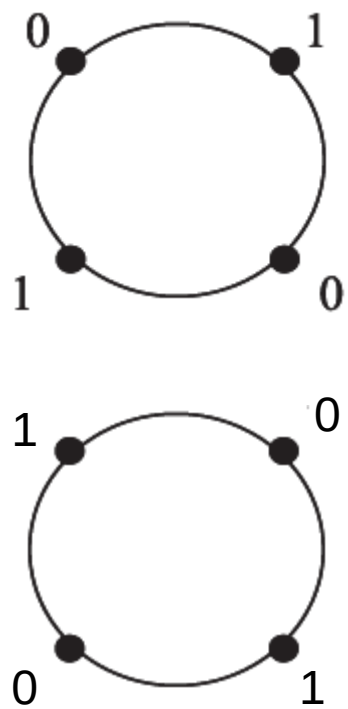
- Complete Graph: An IS has at most 1 agent, for n = 4 => 4 specialized equilibria
- Star Graph: 2 MIS => 2 specialized equilibria

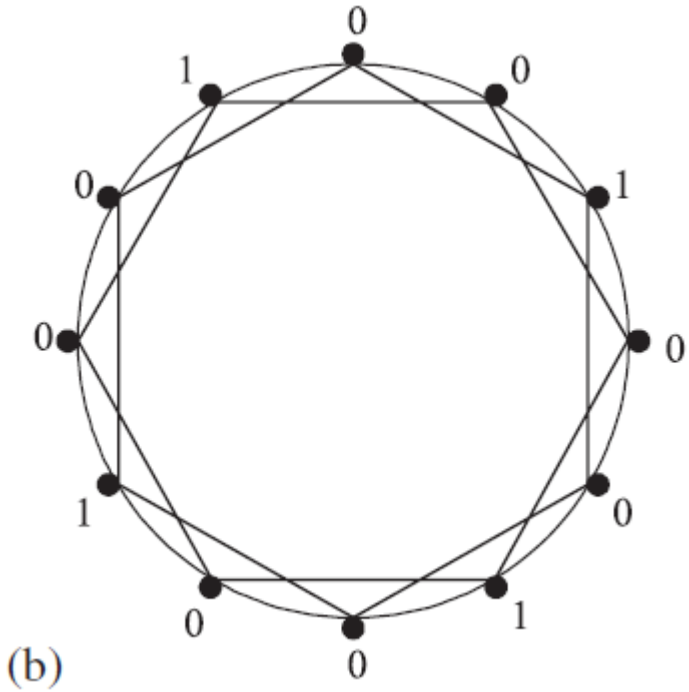




Example 2: Specialized Equilibria and MISs, Cont'd

- Circle Graphs: 2 MIS / 4MIS, each containing 2 / 4 agents on opposite sides/chords of the circle





Stable NE

- Consider a *distributed or a hybrid* equilibrium and take a individual deviation (a small decrease/increase in effort). Is the deviation profitable?
- If an agent decreases e, then some other agent must increase, so agent has incentive to decrease more, no stability
- If an agent increases e, then he suffers more cost, so agent has no incentive to increase

Stable NE cont'd

- Consider a specialized equilibrium and take an individual deviation. Is the deviation profitable?
- If agent is a specialist and decreases his effort, free riders must increase, so deviation profitable and leads to distributed or hybrid equilibrium
- If agent is free rider, he cannot decrease
- If free rider is linked to another specialist, then free rider does not increase

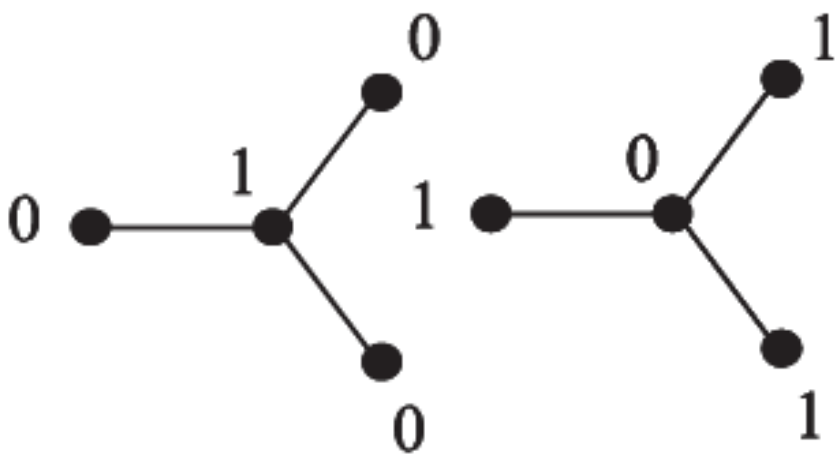
Stable NE cont'd

- Conclusion: In a specialized equilibrium, if a free rider is linked to at least 2 specialists, then if one specialist decreases effort, free rider does not increase, so decrease of effort by specialist is not profitable
- This situation corresponds to graphs with MIS of order(at least) 2.

Theorem 2: Stability of NE

- For any social structure g, an equilibrium is stable iff it is specialized AND every free rider is linked to (at least) 2 specialists. Hence there exists a stable equilibrium in a graph g iff it has a maximal independent set of order 2.

Stability of NE: Examples

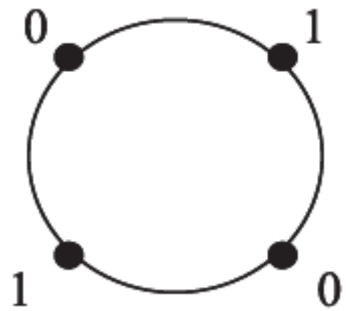


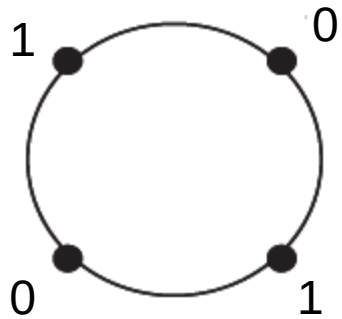
(b)

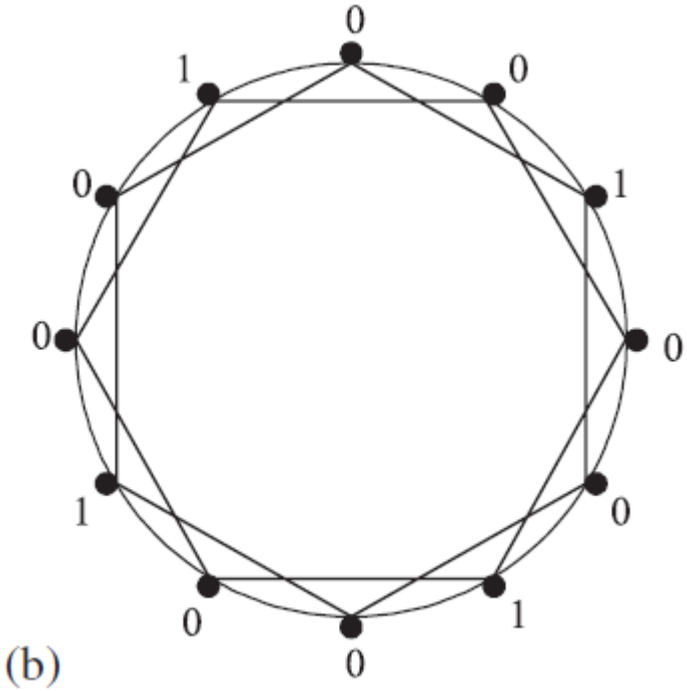
Both effort profiles are NE.
The left one is not stable because the set of specialists (the player in the centre) is not a MIS of order 2.
The right one is a stable NE because the set of specialists (3 players in the periphery) is a MIS of order 3

Stability of NE: Examples

- These effort profiles are stable NE because the set of specialists are MIS of order 2 or higher







Welfare Analysis

- Social welfare of profile *e* : the sum of agents' payoffs at *e*

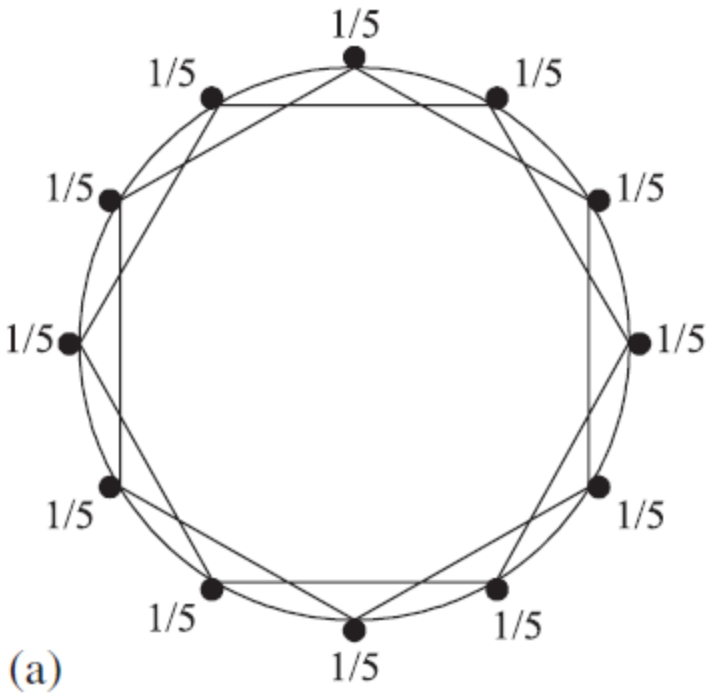
$$W(\mathbf{e};\mathbf{g}) = \sum_{i \in N} b\left(e_i + \overline{e}_i\right) - c \sum_{i \in N} e_i$$

- An *efficient profile* maximizes social welfare or $\frac{\partial W(\mathbf{e};\mathbf{g})}{\partial e_i} = 0 \quad \text{for all } e_i > 0$

$$b'(e_i + \overline{e}_i) + \sum_{j \in N_i} b'(e_j + \overline{e}_j) = c$$

An efficient profile

- Take a *regular graph of degree k*
- A distributed profile is an efficient profile with
- $b'((k+1)e) = \frac{c}{(k+1)}$, *MB = MC*
- Individual benefit is $b((k+1)e)$
- Individual cost is ce
- In the circle n = 12, k = 4
- *e = 1/5: b´*(5*e*) = *c*/5
- Conditions for efficiency satisfied



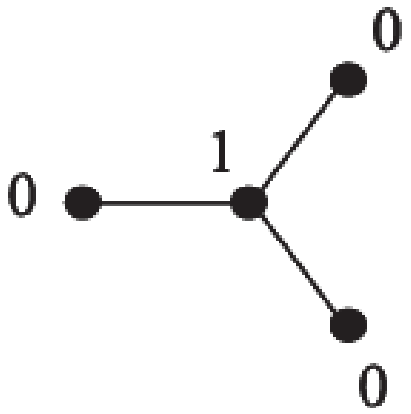
(a)

Non regular graphs

- For the star for example and graphs that include it, an efficient profile contains free riders
- If an agent's neighborhood is a strict subset of an other's, he makes no effort

For any graph $\mathbf{g}$ with two individuals i and j such that $i \cup N_i \subsetneq j \cup N_j$, $e_i = 0$ in any efficient profile.

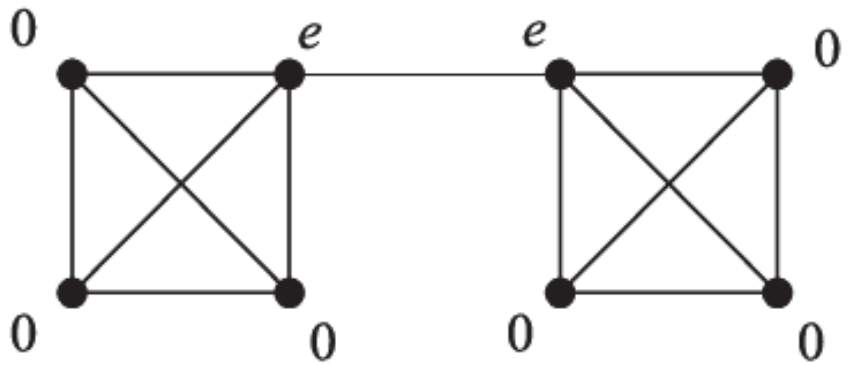
- Peripheral agent's degree 1
- Central agent's degree 3



A NE profile is not efficient

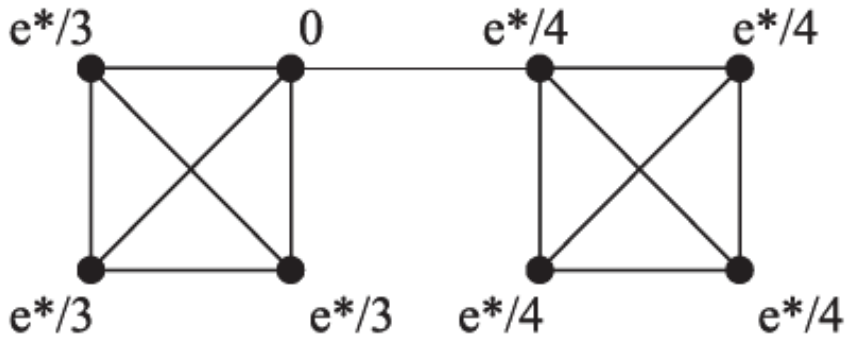
- The condition for maximization of social welfare W is $$b'(e_i + \overline{e}_i) + \sum_{j \in N_i} b'(e_j + \overline{e}_j) = c$$
- However the condition for maximization of private welfare U is $$b'(e_i + \overline{e}_i) = c$$

Example: efficient vs NE profile



(a)

Efficient but not equilibrium profile



(b)

Equilibrium but not efficient profile

Conclusion: Linking does not necessarily increase efficiency

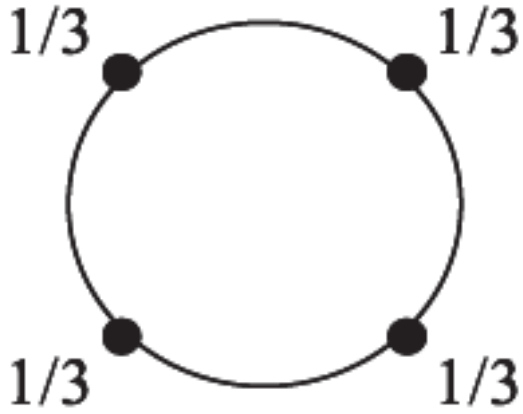
Second Best NE

- At any equilibrium each agent has benefit of at least e* effort, b(e*)
- In specialized graphs free riders attain at least b(e*) at no cost
- We can rewrite total welfare as: total minimum benefits + total benefit premiums – total costs

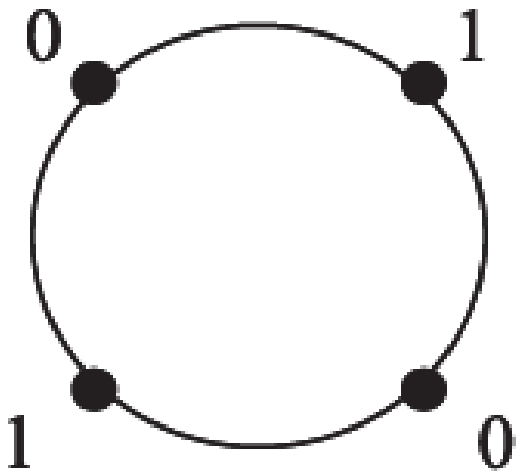
$$W(\mathbf{e};\mathbf{g}) = nb(e^*) + \sum_{j:e_j=0} [b(\bar{e}_j) - b(e^*)] - c\sum_i e_i$$

Ex. 5 Distributed equilibrium

- Agents 1,2,3,4
  clockwise from 7 to 5 o'clock, e* = 1
- Ui = b(1/3+1/3+1/3) – c/3, i = 1,2,3,4
- Wd = 4 b(1/3+1/3+1/3) – 4c/3



Ex. 5 Specialized Equilibrium



- U1 = b(1+0+0) – c
- U2 = b(0+1+1) – 0c
- U3 = b(1+0+0) – c
- U4 = b(0+1+1) – 0c
- Notice that b(2) > b(1)
- Ws = U1+U2+U3+U4 = 2 b(2) +2 b(1) – 2c
- Or Ws = 4 b(1) + 2 [b(2)-b(1)] - 2c
- Recall Wd = 4 b(1) – 4c/3

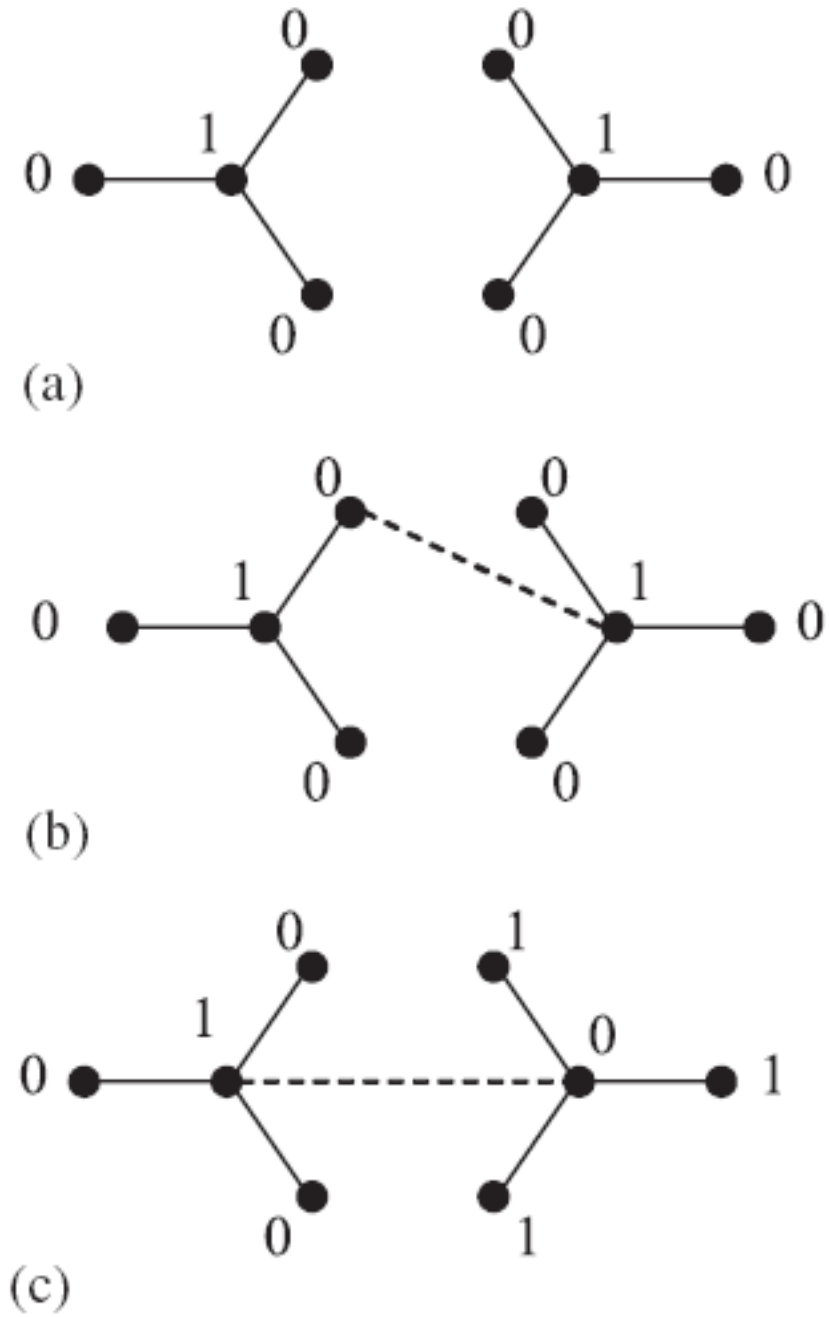
Conclusion: Specialized NE are stable and 2best

Welfare effects of new links

- A new link has 2 opposite effects
  - Greater access to the public good (W↑)
  - Agents have less incentive to exert effort (W↓)
- Take a graph g and two agents i and j which are not linked. Connect these agents and name the graph g+ij
- If W(g+ij) < W(g) or [W(g+ij) > W (g)] then the link is *welfare decreasing* [resp. *increasing*]

Welfare effects of new links

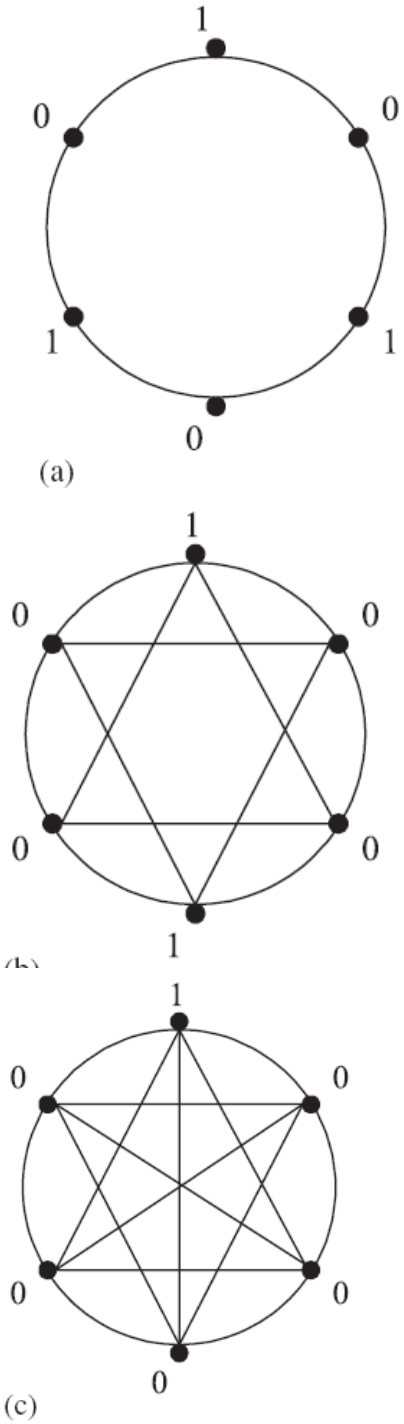
- Take a second best equilibrium profile of efforts e
- If i&j do not exert effort before connection, then linking them cannot be welfare decreasing
- If i&j do exert effort before connection, then linking them destroys equilibrium e



Example 6

- (a) 2nd best
- (b) link increases w (costs the same, extra benefits increase)
- (c) linking 2 specialists changes NE. Wrto (a) in new NE costs increase, extra benefit premia, W decreases if

$$2ce^* > b(4e^*) - b(e^*).$$



Example 6 cont'd

- (a) 2nd best
- (b) Costs decrease, benefit premia increase, welfare increases
- (c) Costs decrease, complete graph=> no benefit premia, welfare decreases
- Conclusion: welfare can be higner in incomplete graphs

Conclusions

- In this model, there is a fixed social structure, and agents choose how much to contribute to a public good (innovation, acquisition of information etc) when the good is non-excludable among their linked neighbors.
- Networks can lead to specialization in public good provision
- In every social network there is an equilibrium where some individuals contribute and others free ride. In many networks, this extreme is the only outcome.

Conclusions

- Specialization can benefit society as a whole. This outcome arises when contributors are linked, collectively, to many agents
- Individuals with active neighbors in a social network, enjoy higher benefit and exert little effort
- A new link increases access to public goods, but reduces individual incentives to contribute. Hence, overall welfare can be higher when there are holes in a network