Στατιστική Μηχανική και Εντροπία Πολύπλοκων Συστημάτων

Ευάγγελος Χ. Μητσοκάπας
Αναστάσιος Μπούντης

Τομέας Εφαρμοσμένης Ανάλυσης
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή
2. Κλασική Στατιστική Μηχανική
3. Μη Εκτατική Στατιστική Μηχανική
4. Αξιωματική Ταξινόμηση Εντροπικών Μορφών
5. Η Standard Απεικόνιση
6. Συμπεράσματα και Ανοικτά Ερωτήματα

Εισαγωγή

Χαοτική Δυναμική

- Ένα σύστημα N βαθμών ελευθερίας σε μία κατάσταση ημι-στατικής ισορροπίας χαρακτηρίζεται είτε από εργοδικότητα (ισχυρό χάος) είτε από μία ανομοιογενή «αταξία» (ασθενές χάος)
- Η κατανομή που περιγράφει ένα ισχυρά χαοτικό σύστημα είναι Gauss ενώ ένα ασθενώς χαοτικό σύστημα περιγράφεται από q-Gaussians

Αντικείμενο της Μελέτης

- Ποιες θερμοδυναμικές ιδιότητες περιγράφουν κατάλληλα τέτοια συστήματα;
- Ποιος ο ρόλος της Εντροπίας και των κατανομών που την βελτιστοποιούν στην ανάλυση αυτή;

Εισαγωγικές Έννοιες

Περιγραφή Συστήματος

- Μακροσκοπικές Μεταβλητές (Θερμοδυναμική)
  π.χ. πίεση, όγκος, θερμοκρασία,...
- Μικροσκοπικές Μεταβλητές (Κλασσική Μηχανική)
  π.χ. ταχύτητα, ενέργεια, μάζα,...

Η έννοια της Εντροπίας

- Clausius (1865): Παρατήρησε ότι το πηλίκο $dS = \frac{dQ}{T}$ σε μία ιδανική αντιστρεπτή μεταβολή είναι σταθερό
- Γενικά για ένα κλειστό (απομονωμένο) σύστημα: $dS \geq 0$

Κλασική Στατιστική Μηχανική

Σκοπός

Μελέτη μακροσκοπικών ιδιοτήτων συστημάτων N βαθμών ελευθερίας και των σχέσεων τους με την μικροσκοπική δυναμική σε μοριακό επίπεδο

Στατιστική Κανονικού Συνόλου (Canonical Ensemble)

- Θεωρούμε N_T ανεξάρτητα αντίγραφα απομονωμένου συστήματος, σε δεδομένη χρονική στιγμή, με διαφορετικές μικροκαταστάσεις και κοινά μακροσκοπικά μεγέθη
- Κανονικό Στατιστικό Σύνολο (NVT): Ίδιος αριθμός N, όγκος V και θερμοκρασία T για όλα τα αντίγραφα N_T

Βέλτιστη Κατανομή Πληθυσμών

Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί μία οποιαδήποτε κατανομή $(n_0, n_1, \cdots)$ του συστήματος είναι:

$$W = \frac{N_T!}{n_0! n_1! \cdots} \overset{Stirling}{\Longrightarrow} \ln W \approx N_T \ln(N_T) - \sum_i n_i \ln(n_i)$$

Θεωρούμε κανονικό σύνολο (NVT), $N \to \infty$ τέτοια ώστε $d\langle E\rangle/dt = 0$, δηλαδή:

$$\sum_i n_i = N_T \quad \text{και} \quad \sum_i n_i E_i = N_T \langle E\rangle$$

Για να βρούμε την κατανομή με το μέγιστο στατιστικό βάρος βελτιστοποιούμε την $\ln W$:

$$\phi \equiv \ln W + \alpha \left(\sum_i n_i - N_T \right) - \beta \left(\sum_i n_i E_i - N_T \langle E\rangle \right)$$

και επιβάλλοντας την συνθήκη $\partial\phi/\partial n_i = 0, \forall i$ καταλήγουμε ότι:

$$n_i = \mu e^{-\beta E_i}, \quad \mu = e^{\alpha - 1}$$

Κατανομή Boltzmann

Προσδιορισμός Συντελεστών μ και β

- $\sum_i n_i = N_T \Rightarrow \mu = \frac{N_T}{\sum_i e^{-\beta E_i}}$
- $\beta = \frac{1}{k_B T}$, όπου T η θερμοκρασία και k_B σταθερά Boltzmann

Κατανομή Boltzmann

Αντικαθιστώντας μ, β:

$$p_i = \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Z}, \quad Z = \sum_i e^{-E_i/k_B T}$$

όπου Z η κανονική συνάρτηση επιμερισμού

Εντροπία Boltzmann-Gibbs

Ελεύθερη Ενέργεια Helmholtz

$$A = A(N, V, T) = U - TS$$

Για απειροστή μεταβολή dA προκύπτει $S = -\partial A/\partial T$ και έτσι έχουμε:

$$A = A(0) - k_B T \ln Z, \quad Z = Z\left(N, V, T\right)$$

Εντροπία Boltzmann-Gibbs

$$S_{BG} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$$

δεδομένου ότι $\sum_i p_i = 1$

Ιδιότητες S_{BG}

Μη-Αρνητικότητα

Όταν υπάρχει μόνο μία πιθανή κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί το σύστημα τότε $S_{BG} = 0$. Επιπλέον, δεδομένου ότι $0 < p_i < 1, p_i \neq 1$, και $W > 1$ ισχύει:

$$S_{BG} = k_B \langle \ln (1/p_i) \rangle$$

Μέγιστη Εντροπία

Έστω W ο αριθμός των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα, με πιθανότητες p_i. Στην περίπτωση ίσων πιθανοτήτων ($p_i = 1/W$), η εντροπία γίνεται μέγιστη:

$$S_{BG} = k_B \ln W$$

Κοιλότητα

Η εντροπία παρουσιάζει ένα μέγιστο για την περίπτωση ίσων πιθανοτήτων και ισχύει:

$$S_{BG}(\{p_i^{''}\}) > \lambda S_{BG}(\{p_i\}) + (1-\lambda) S_{BG}(\{p_i^{'}\})$$

Ιδιότητες S_{BG}

Εκτατική και Αθροιστική Ιδιότητα

Για δύο πιθανοκρατικώς ανεξάρτητα θερμοδυναμικά συστήματα A και B με καταστάσεις W_A,W_B αντίστοιχα ισχύει:

$$S_{BG}(A+B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B)$$

Άρα S_{BG} εκτατική μεταβλητή.

Διασταλτικότητα

Η εντροπία παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την επιβολή νέων καταστάσεων με μηδενική πιθανότητα σε ένα σύστημα.

$$S_{BG}\left(p_1, p_2, \ldots, p_W\right) = S_{BG}\left(p_1, p_2, \ldots, p_W, 0\right)$$

Μοναδικότητα S_{BG}

Θεώρημα Μοναδικότητας Khinchin

- Η S συνεχής συνάρτηση των p_i
- Η $S(p_i = 1/W, \forall i)$ αυξάνει γνησίως μονότονα
- Δεδομένου ότι $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B \forall (i,j)$ τότε:

$$S(A+B) = S(A) + S(B|A)$$

  και την δεσμευμένη εντροπία $S(B|A) \equiv \sum_{i=1}^{W_A} p_i^A S\left(p_{ij}^{A+B}|p_i^A\right)$.
- $S(p_1, p_2, \ldots, p_w, 0) = S(p_1, p_2, \ldots, p_w)$

Τότε και μόνο τότε:

$$S = S_{BG} = -k \sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i, k > 0$$

Κατανομή Gauss

Εκθετική Κατανομή

Δεδομένων των περιορισμών:

- $\langle x \rangle = \int_0^\infty x p(x) dx$
- $\int_0^\infty p(x) dx = 1$

προκύπτει η κατανομή:

$$p(x) = \frac{e^{-x/\langle x \rangle}}{\langle x \rangle}$$

Κατανομή Gauss

Δεδομένων των περιορισμών:

- $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^\infty x^2 p(x) dx > 0$
- $\int_{-\infty}^\infty p(x) dx = 1$

προκύπτει η κατανομή:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle x^2 \rangle}} e^{-x^2/2\langle x^2 \rangle}$$

$q-$ Συναρτήσεις

Πρόβλημα Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = y^q, \quad y(0) = 1, \quad q \in \mathbb{R}, q \neq 1$$

$q-$ εκθετικό

$$e_q^x = \begin{cases} e^x & \text{εάν} \quad q \to 1 \\ [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{(1-q)}} & \text{εάν} \quad q \neq 1 \quad \text{και} \quad 1 + (1-q)x > 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad q \neq 1 \quad \text{και} \quad 1 + (1-q)x \leq 0 \end{cases}$$

$q-$ λογάριθμος

$$\ln_q(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{εάν} \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad q \to 1 \\ \frac{x^{1-q}-1}{1-q} & \text{εάν} \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

Εντροπία S_q

Εισαγωγή

Στατιστική Μηχανική Boltzmann-Gibbs :

- Αλληλεπιδράσεις μικρής εμβέλειας
- Εκτατικότητα

Μη Εκτατική Στατιστική Μηχανική:

- Αλληλεπιδράσεις μακράς εμβέλειας
- Μη Εκτατικότητα

Εντροπία Tsallis

$$S_{BG} = k_B \left\langle \ln(1/p_i) \right\rangle \longrightarrow S_q = k \left\langle \ln_q(1/p_i) \right\rangle, k \in \mathbb{R}$$

Προκύπτει:

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1}$$

Παρατήρηση:

$$\lim_{q \to 1} S_q = S_{BG}$$

Ιδιότητες S_q

Μη Αρνητικότητα

Για $0 < p_i < 1$:

$$p_i < 1 \Leftrightarrow 1/p_i > 1 \Leftrightarrow \ln_q (1/p_i) > \ln_q 1 = 0$$

Άρα $S_q \geq 0, \quad \forall q \in \mathbb{R}$

Μέγιστη Εντροπία

Έστω W ο αριθμός των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα, με πιθανότητες p_i. Στην περίπτωση ίσων πιθανοτήτων ($p_i = 1/W$), η εντροπία γίνεται μέγιστη:

$$S_q = k \ln_q W$$

Κοιλότητα

Η εντροπία παρουσιάζει ένα μέγιστο για την περίπτωση ίσων πιθανοτήτων και ισχύει:

$$S_q \left(\{p_i^{''}\}\right) > -\lambda S_q \left(\{p_i\}\right) + (\lambda - 1) S_q \left(\{p_i^{'}\}\right)$$

Ιδιότητες S_q

Μη Εκτατική και Μη Αθροιστική Ιδιότητα

Για δύο πιθανοκρατικώς ανεξάρτητα θερμοδυναμικά συστήματα A και B με καταστάσεις W_A,W_B αντίστοιχα ισχύει:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B)$$

Άρα S_q μη εκτατική μεταβλητή.

Διασταλτικότητα

Η εντροπία παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την επιβολή νέων καταστάσεων με μηδενική πιθανότητα σε ένα σύστημα.

$$S_q\left(p_1, p_2, \ldots, p_W\right) = S_q\left(p_1, p_2, \ldots, p_W, 0\right)$$

Μοναδικότητα S_q

Θεώρημα Μοναδικότητας Santos

- Η S συνεχής συνάρτηση των p_i
- Η $S(p_i = 1/W, \forall i)$ αυξάνει γνησίως μονότονα
- Δεδομένου ότι $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B, \forall (i,j)$ τότε:

$$\frac{S(A+B)}{k} = \frac{S(A)}{k} + \frac{S(B)}{k} + (1-q)\frac{S(A)}{k}\frac{S(B)}{k}, \quad k > 0$$

- Για $p_L = \sum_{L \text{ όροι}} p_i$, $p_M = \sum_{M \text{ όροι}} p_i$, έτσι ώστε $L + M = W$ και $p_L + p_M = 1$:

$$S(p_i) = S(p_L, p_M) + p_L^q S(p_i|p_L) + p_M^q S(p_i|p_M)$$

Τότε και μόνο τότε:

$$S = S_q = k\frac{1 - \sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1}, k > 0$$

Κατανομές q-Gauss

Επιβολή Γενικευμένων Περιορισμών

- Κανονικοποίηση: $\int_0^\infty p(x)dx = 1$
- Συνοδός Κατανομή:

$$P(x) = \frac{p^q(x)}{\int_0^\infty p^q(k)dk}$$

τέτοια ώστε: $\int_0^\infty P(x)dx = 1$

q-Εκθετική Κατανομή

Δεδομένης συνθήκης κανονικοποιήσης και q-μέσης τιμής:

$$\langle x \rangle_q = \int_0^\infty xP(x)dx = X_q$$

προκύπτει η q-συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_{opt}(x) = \frac{e_q^{-\beta_q(x-X_q)}}{Z_q}, \quad Z_q = \int_0^\infty e_q^{-\beta_q(x-X_q)}dx$$

Παρατήρηση: $p_{opt} \xrightarrow{q\to 1} p_{Boltzmann}$

Κατανομές q-Gauss

q-Gaussian Κατανομή

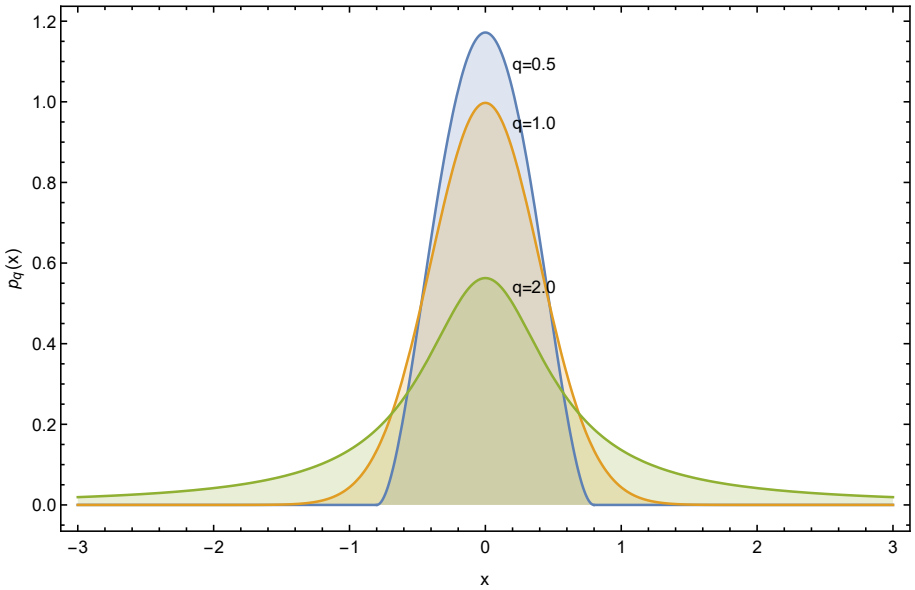
Δεδομένης συνθήκης κανονικοποίησης και ποσότητας:

$$\langle x^2 \rangle_q = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx = X_q^* > 0$$

προκύπτει η q-συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_{opt}(x) = \frac{\left[1-\beta_q(1-q)x^2\right]^{1/(1-q)}}{Z_q}, \quad Z_q = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1-\beta_q(1-q)x^2\right]^{1/(1-q)} dx$$

Παρατήρηση: $p_{opt} \xrightarrow{q \to 1} p_{Gaussian}$



Η Κλάση Εντροπικών Μορφών κατά Thurner και Hanel

Κατά Khinchin Θεμελίωση

Μελετάμε $S_g[p] = \sum_{i=1}^{W} g(p_i)$, $W \to \infty$ τέτοια ώστε:

- **K1**: S_g συνεχής $\to g$ συνεχής
- **K2**: S_g μέγιστη για $p_i = 1/W \to g$ κοίλη
- **K3**: S_g διασταλτική $\to g(0) = 0$
  Μη Αθροιστική Εντροπία διότι $S(A+B) \neq S(A) + S(B|A)$

Σχέσεις Κλιμάκωσης

Δεδομένου ότι $W \to \infty$ προκύπτει η σχέση κλιμάκωσης:

$$\frac{S_g(\lambda W)}{S_g(W)} = \lambda \frac{g(1/\lambda W)}{g(1/W)}$$

και η συνάρτηση κλιμάκωσης f αποδεικνύεται:

$$f(z) \equiv \lim_{x \to 0^+} \frac{g(zx)}{g(x)} = z^c, c \in (0,1], \quad \forall 0 < z < 1$$

Ασυμπτωτικές Ιδιότητες Εντροπικών Μορφών

Πρώτη Ασυμπτωτική Ιδιότητα

Από τις σχέσεις κλιμάκωσης προκύπτει:

$$\lim_{W\to\infty} \frac{S(\lambda W)}{S(W)} \lambda^{c-1} = 1$$

Δεύτερη Ασυμπτωτική Ιδιότητα

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό $\lambda \to W^{\alpha}$ και ορίζοντας την ποσότητα:

$$h_c(\alpha) = \lim_{W\to\infty} \frac{S_g\left(W^{\alpha+1}\right)}{S_g(W)}$$

προκύπτει:

$$h_c(\alpha) = (1+a)^d, \alpha \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$$

Συμπέρασμα

Εφικτός ο χαρακτηρισμός κάθε στατιστικού συστήματος **K1-K3** μέσω του ζεύγους (c, d) το οποίο ορίζει κλάσεις ισοδυναμίας για τις g μέσω της σχέσης $g_\alpha = g_\beta \Leftrightarrow c_\alpha = c_\beta$ και $d_\alpha = d_\beta$

Ταξινόμηση Στατιστικών Συστημάτων

Προσδιορισμός Εντροπίας BG

Για $g_{BG}(x) = -x \ln x$ προκύπτουν:

- $f(z) = z \Leftrightarrow c = 1$
- $h_c(\alpha) = 1 + a \Leftrightarrow d = 1$

Άρα $S_{BG} \longrightarrow (c, d) = (1, 1)$

Προσδιορισμός Εντροπίας Tsallis

Για $g_q(x) = (x - x^q)/(1 - q), 0 < q < 1$ προκύπτουν:

- $f(z) = z^q \Leftrightarrow c = q$
- $h_c(\alpha) = 1 \Leftrightarrow d = 0$

Άρα $S_q \longrightarrow (c, d) = (q, 0)$

Οικογένειες Εντροπικών Μορφών

Συνάρτηση $g_{c,d,r}$

Η οικογένεια συναρτήσεων $g_{c,d,r}$ ικανοποιεί τις δύο ασυμπτωτικές ιδιότητες:

$$g_{c,d,r}(x) = rA^{-d}e^{A}\Gamma\left(1+d, A - c\ln x\right) - rcx$$

όπου η μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα:

$$\Gamma(a,b) = \int_b^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$$

και:

$$A(c,d,r) = \frac{cdr}{1-(1-c)r}$$

για $c \in (0,1], d \in \mathbb{R}$ και $r = r(c,d)$

Ειδικές Περιπτώσεις Οικογένειας $g_{c,d,r}$

Προσδιορισμός Εντροπίας BG μέσω $g_{c,d,r}$

Για $d > 0$ επιλέγοντας $r = 1/(cd + (1-c))$ προκύπτει:

$$S_{c,d}[p] = \sum_{i=1}^{W} g_{c,d}(p_i) = e \sum_{i=1}^{W} \frac{\Gamma(1+d, 1-c\ln p_i)}{1+c(d-1)} - \frac{c}{1+c(d-1)}$$

Η S_{BG} ανήκει στην κλάση $(c,d) = (1,1)$ και αποδεικνύεται:

$$S_{(1,1)}[p] = \sum_{i=1}^{W} p_i \ln(1/p_i) + 1 = S_{BG} + 1$$

Προσδιορισμός Εντροπίας Tsallis μέσω $g_{c,d,r}$

Η S_q ανήκει στην κλάση $(c,d) = (q,0)$ και για $d = 0$ επιλέγοντας $r = 1/(1-q)$ προκύπτει:

$$S_{c,d}[p] = S_{(q,0)}[p] = \sum_{i=1}^{W} g_{(q,0)}(p_i) = \sum_{i=1}^{W} \frac{\Gamma(1, -q\ln p_i) - qp_i}{1-q}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$S_{(q,0)}[p] = \frac{1 - \sum_{i=1}^{W} p_i^q}{q-1} + 1 = S_q + 1$$

Ειδικές Περιπτώσεις Οικογένειας $g_{c,d,r}$

Γενικευμένες Εντροπικές Μορφές

Εντροπία	c	d
$S_{c,d} = er \sum_i \Gamma\left(d+1, 1-c\ln p_i\right), \quad \left(r = (1-c+cd)^{-1}\right)$	c	d
$S_{BG}(p) = \sum_i p_i \ln\left(1/p_i\right)$	1	1
$S_{q<1}(p) = \frac{1-\sum_i p_i^q}{q-1}, \quad (q<1)$	$c = q < 1$	0
$S_\kappa(p) = -\sum_i p_i \frac{p_i^\kappa - p_i^{-\kappa}}{2\kappa} \quad (0 < \kappa \leq 1)$	$c = 1-\kappa$	0
$S_{q>1}(p) = \frac{1-\sum_i p_i^q}{q-1}, \quad (q>1)$	1	0
$S_b(p) = \sum_i \left(1 - e^{-bp_i} + e^{-b} - 1\right) \quad (b>0)$	1	0
$S_E(p) = \sum_i p_i \left(1 - e^{\frac{p_i - 1}{p_i}}\right)$	1	0
$S_\eta(p) = \sum_{i=1} \Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}, -\ln p_i\right) - p_i \Gamma\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) \quad (\eta > 0)$	1	$d = \frac{1}{\eta}$
$S_\gamma(p) = \sum_i p_i \ln^{1/\gamma}\left(1/p_i\right)$	1	$d = \frac{1}{\gamma}$
$S_\beta(p) = \sum_i p_i^\beta \ln\left(1/p_i\right)$	$c = \beta$	1

Συναρτήσεις Κατανομών

Γενικευμένος Λογάριθμος

Ο γενικευμένος λογάριθμος της $g_{c,d,r}$: $\Lambda(x) = -g'_{c,d,r}(x)$ είναι:

$$\Lambda_g(x) = -g'_{c,d,r}(x) = -rc\left[x^{c-1}\left(1 - \frac{(1-(1-c)r}{dr}\ln x\right)^d - 1\right]$$

Βέλτιστη Κατανομή-Γενικευμένο Εκθετικό

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που βελτιστοποιεί την $g_{c,d,r}$ ορίζεται ως η γενικευμένη εκθετική συνάρτηση $p(x) = \mathcal{E}_{c,d,r}(-x) = \Lambda_g^{-1}(x)$ και είναι:

$$p(x) = \mathcal{E}_{c,d,r}(-x) \Leftrightarrow p(x) = e^{-\frac{d}{1-c}\left[W_k\left(B(1+x/rc)^{\frac{1}{d}}\right) - W_k(B)\right]}$$

όπου $B \equiv \frac{(1-c)r}{1-(1-c)r}e^{\left(\frac{(1-c)r}{1-(1-c)r}\right)}$ και W_k ο k-οστός κλάδος της συνάρτησης Lambert-W, που αποτελεί λύση της $x = W(x)e^{W(x)}$. Για $d \geq 0 \Rightarrow k = 0$ και $d < 0 \Rightarrow k = -1$.

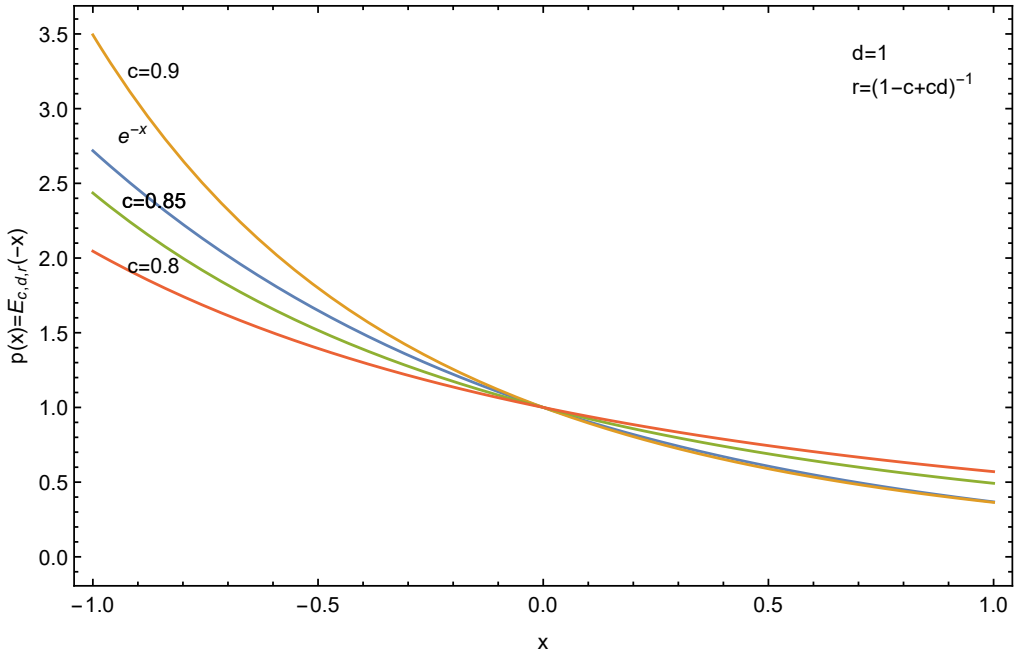
Ειδικές Περιπτώσεις Lambert-W Εκθετικών

Κατανομές Boltzmann

Η S_{BG} ανήκει στην κλάση $(c,d)=(1,1)$ και από την οριακή διαδικασία

$$\lim_{c\to 1}\mathcal{E}_{(c,1,r)}(-x)=\lim_{c\to 1}e^{-\frac{1}{1-c}[W_0(B(1+x/rc))-W_0(B)]}$$

προκύπτει: $p(x)=e^{-x}$



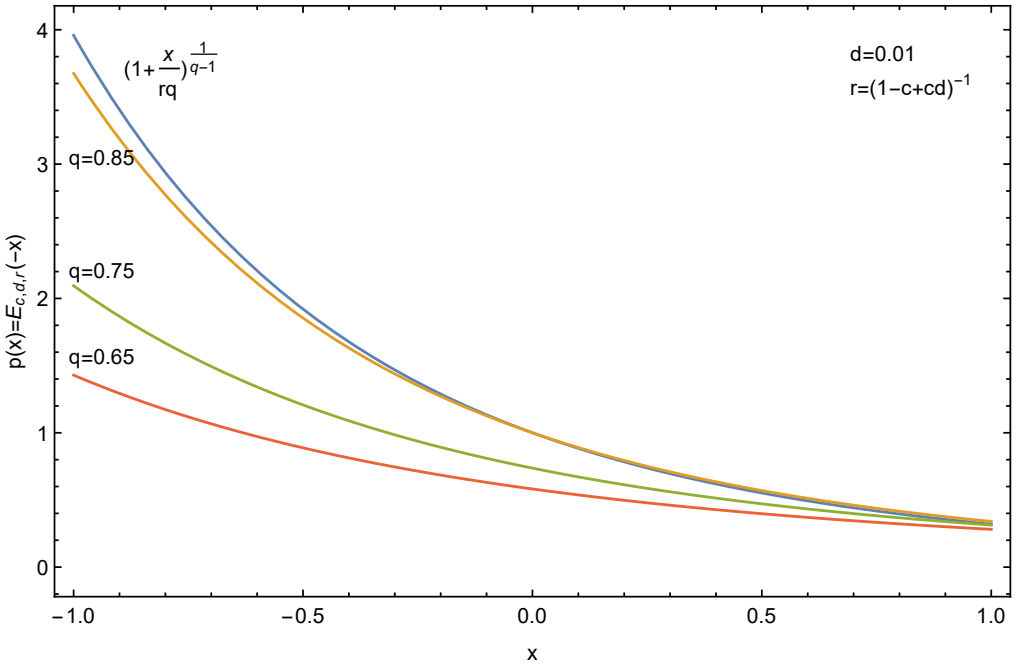
Ειδικές Περιπτώσεις Lambert-W Εκθετικών

Κατανομές Tsallis

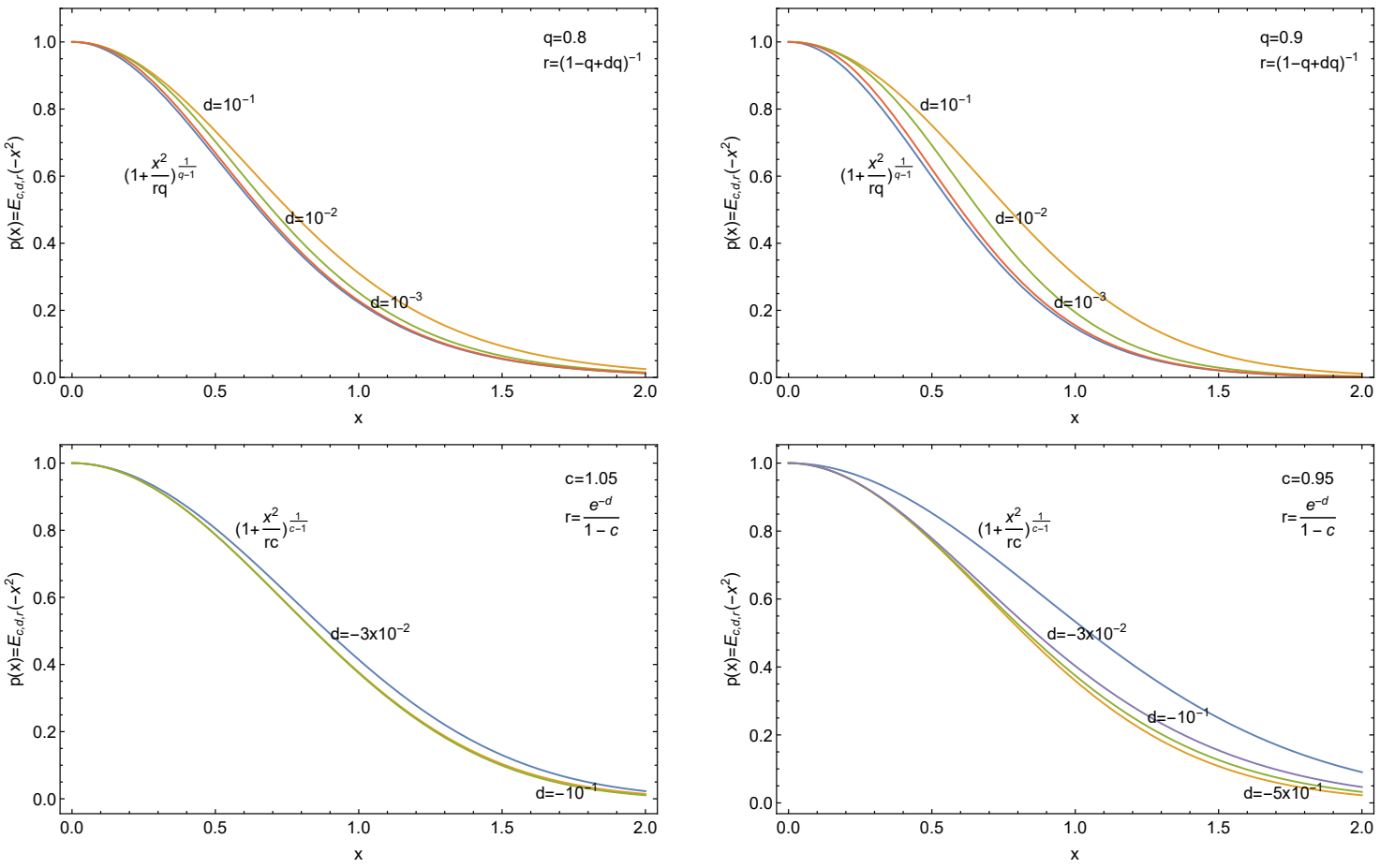
Η S_q ανήκει στην κλάση $(c,d)=(q,0)$ και από την οριακή διαδικασία

$$\lim_{d\to 0}\mathcal{E}(-x)=\lim_{d\to 0^+}\exp\left[-\left(\frac{d}{1-q}\right)\left(W_0\left[B\left(1+\frac{x}{rq}\right)^{\frac{1}{d}}\right]-W_0[B]\right)\right]$$

προκύπτει: $p(x)=\left(1+\frac{x}{rq}\right)^{\frac{1}{q-1}}$



Διαταραχές των Lambert-W εκθετικών



Standard Απεικόνιση

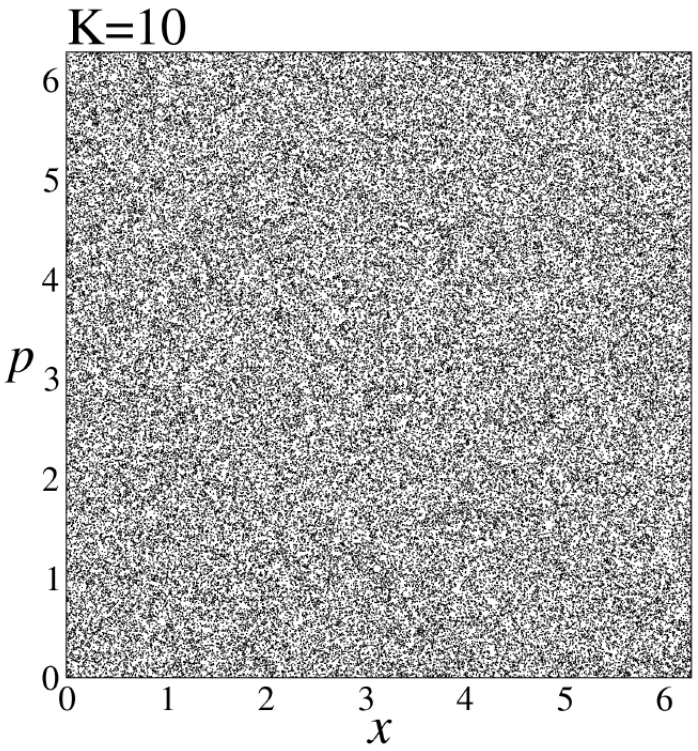
H Standard Απεικόνιση

- Ορίζεται ως:

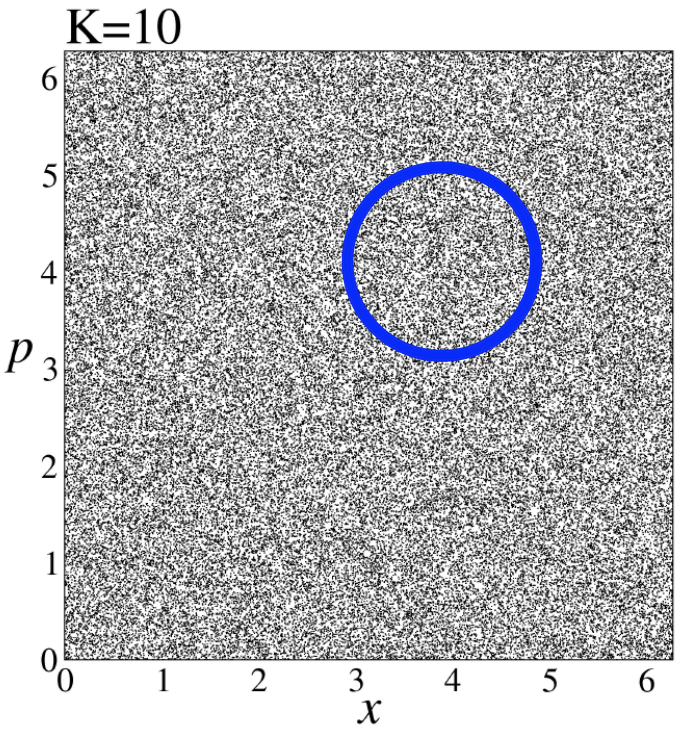
$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i - K \sin x_i \\ x_{i+1} &= x_i + p_{i+1} \end{aligned}$$

  όπου τα $p_i, x_i \in [0, 2\pi]$ αναπαριστούν τις ορμές και τις θέσεις ενός σωματιδίου.
- Επιλογή 10^7 αρχικών συνθηκών με τυχαίο τρόπο, σε ολόκληρο το τετράγωνο $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

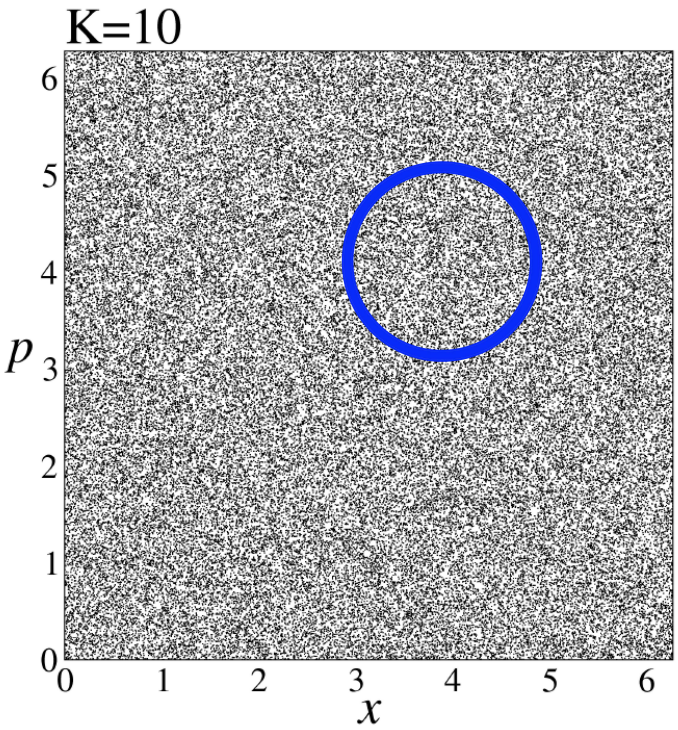
Περίπτωση $K = 10$

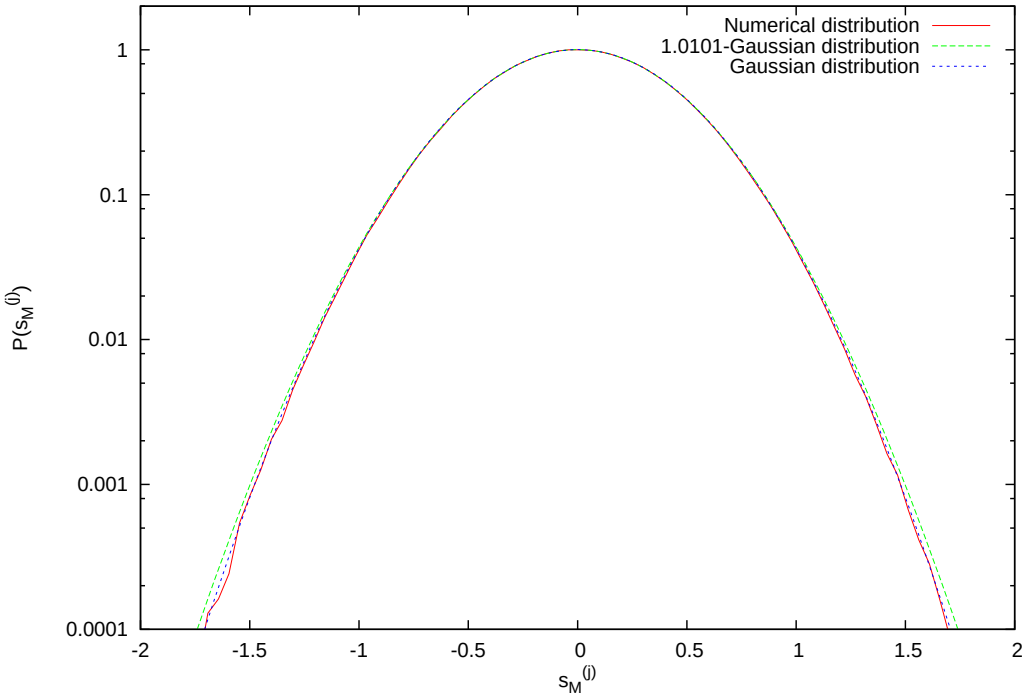


Περίπτωση $K = 10$

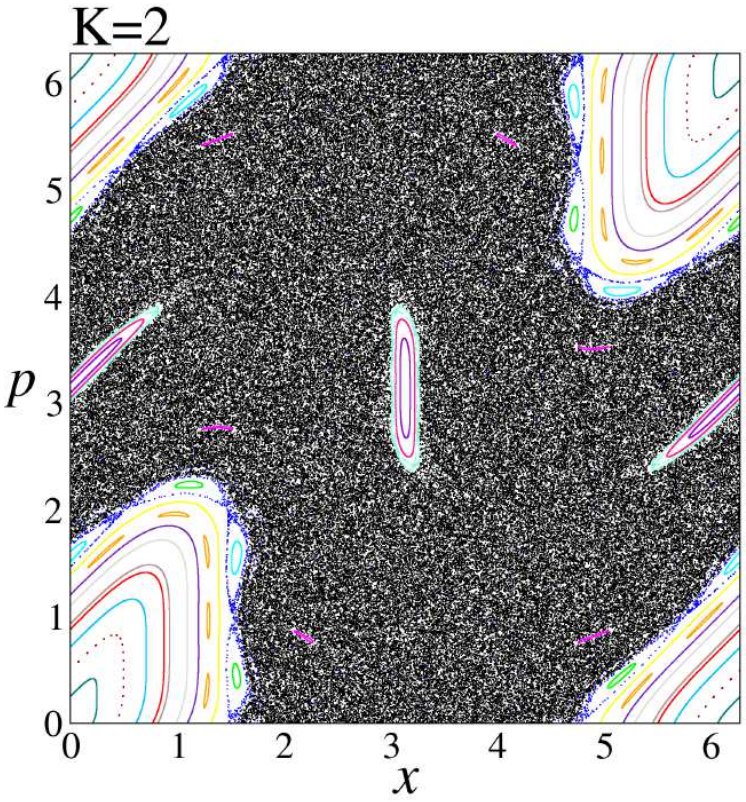


Περίπτωση $K = 10$

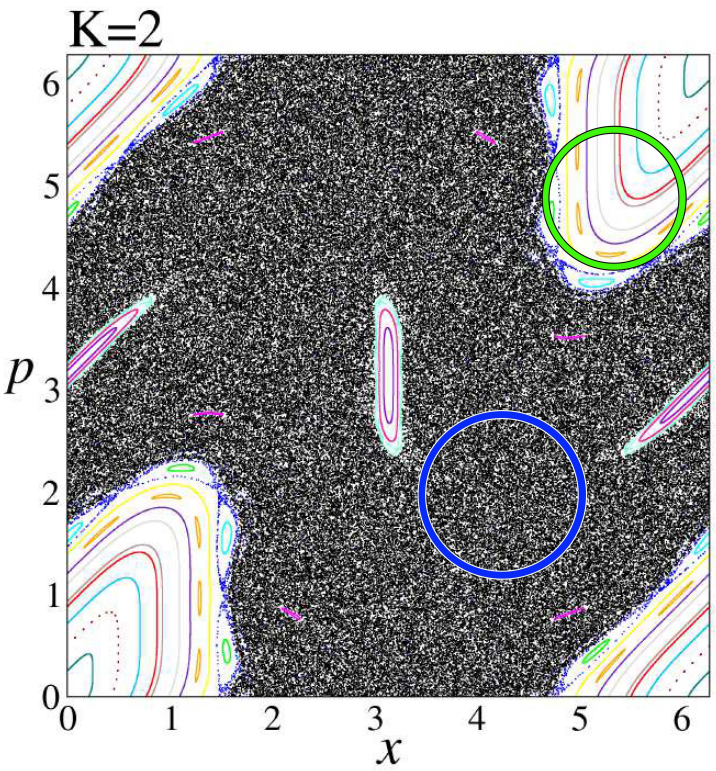




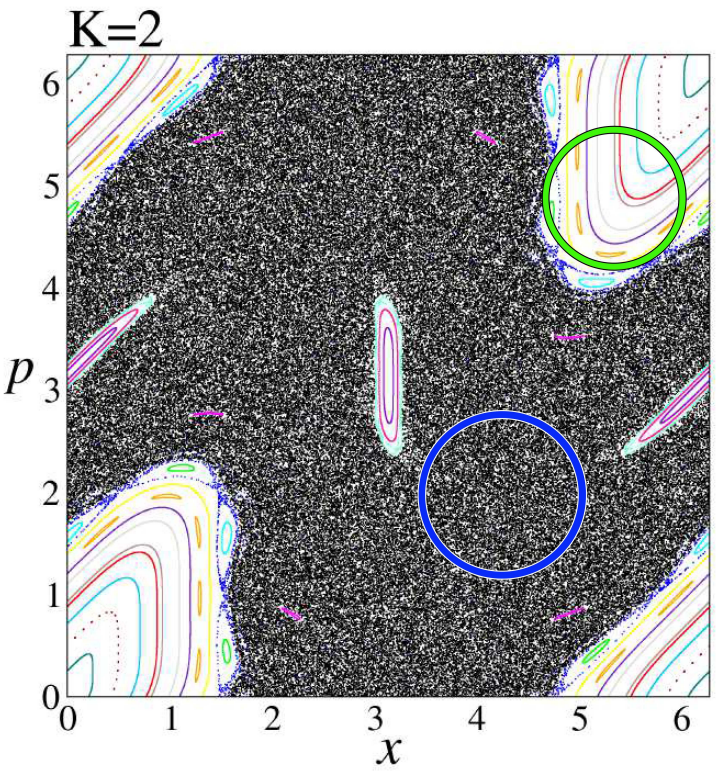
Περίπτωση $K = 2$

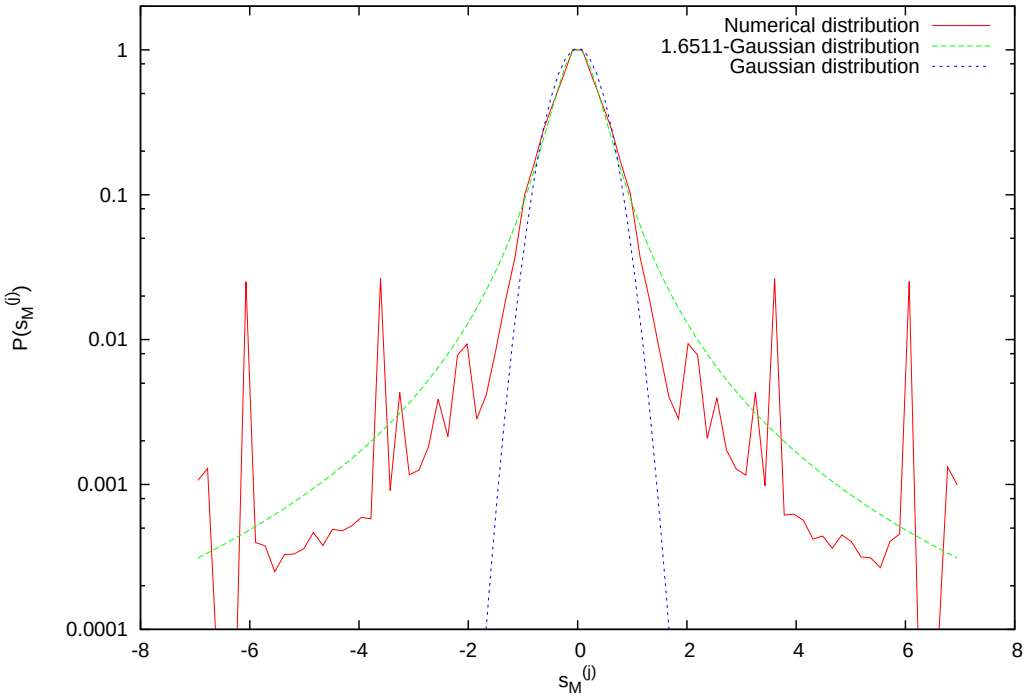


Περίπτωση $K = 2$

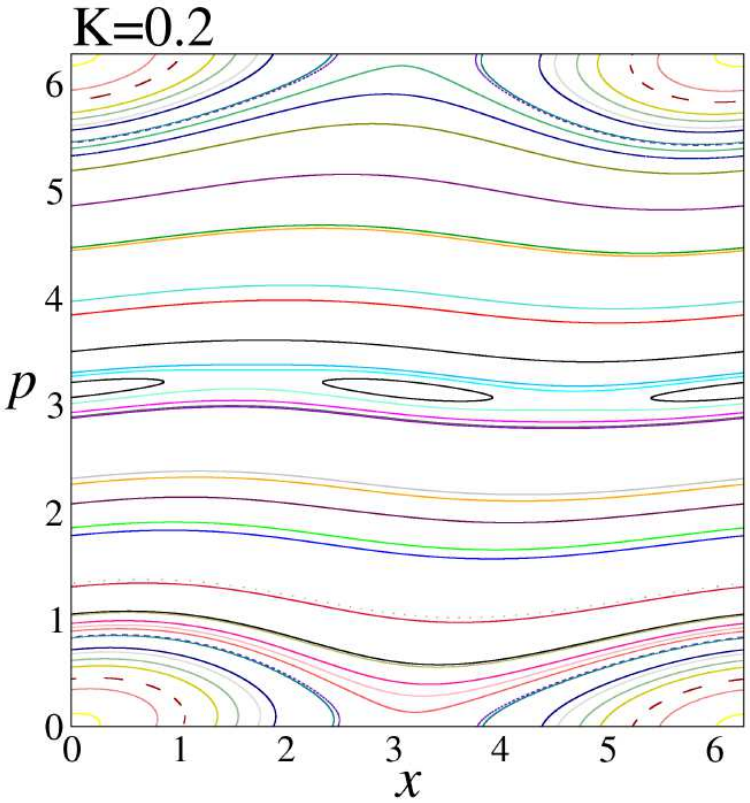


Περίπτωση $K = 2$

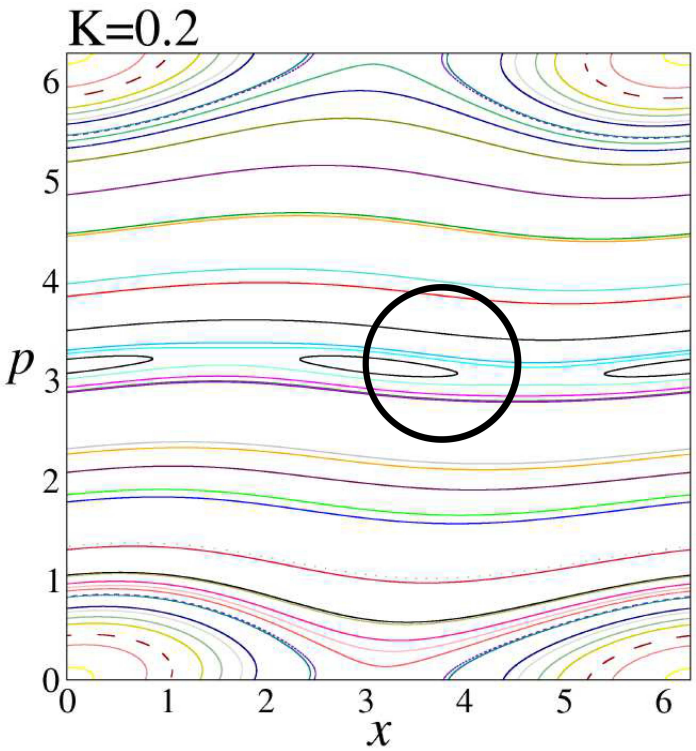




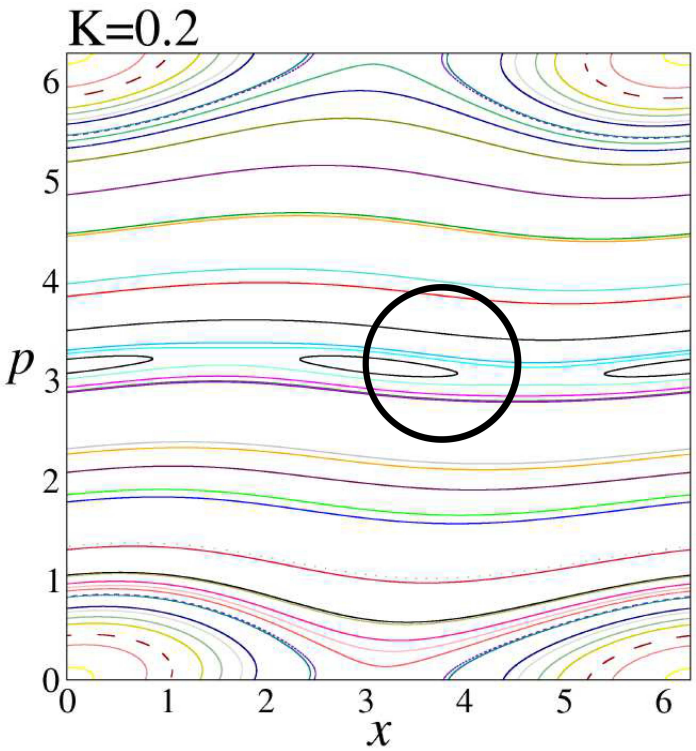
Περίπτωση $K = 0.2$

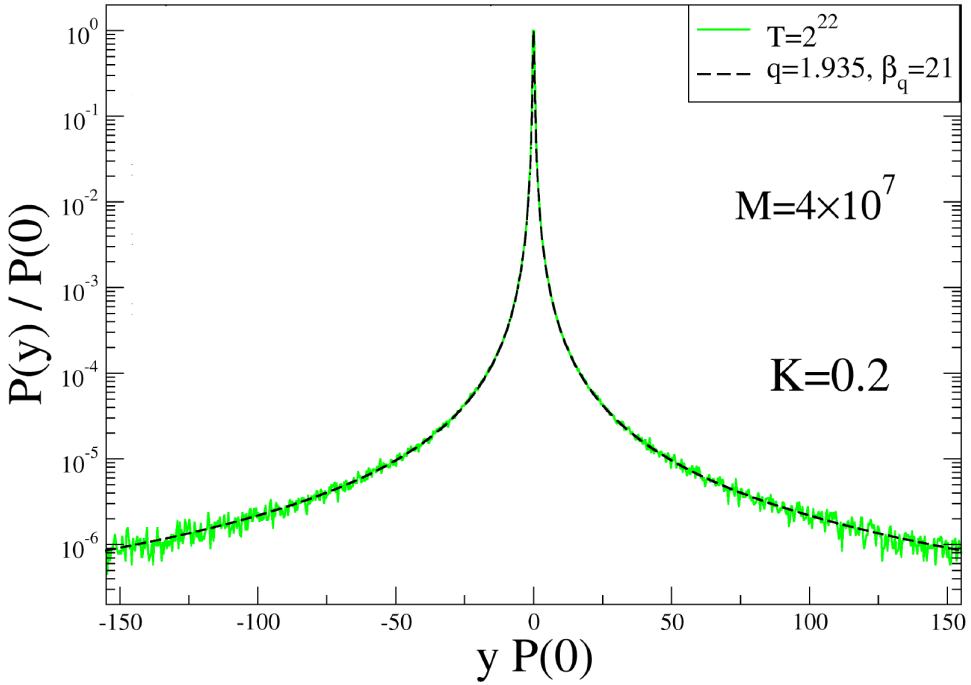


Περίπτωση $K = 2$



Περίπτωση $K = 2$





Συμπεράσματα και Ανοικτά Ερωτήματα

Συμπεράσματα

- Τα πολύπλοκα συστήματα μπορούν να περιγραφούν με μεγάλη επιτυχία από την μη εκτατική εντροπία Tsallis
- Τα εντροπικά συναρτησιακά που πληρούν τα **K1,K2,K3** ταξινομούνται σε κλάσεις που ορίζονται από το ζεύγος παραμέτρων (c, d)
- Οι κατανομές που βελτιστοποιούν τις εντροπίες αυτές είναι της μορφής Lambert-W εκθετικών

Ανοικτά Ερωτήματα

- Διαταραχή των q-Gaussians που προκύπτουν μέσω της ανάλυσης των Thurner και Hanel
- Ταξινόμηση q-κατανομών που προκύπτουν από πειραματικά δεδομένα μέσω των κλάσεων αυτών

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας!